

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESCOAMENTO LAMINAR ATRAVÉS DE VÁLVULAS EXCÊNTRICAS DE
COMPRESSORES DE REFRIGERAÇÃO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

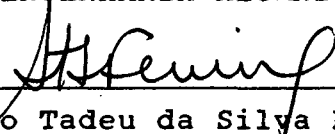
JOSÉ LUIZ GASCHE

FLORIANÓPOLIS, ABRIL - 1992

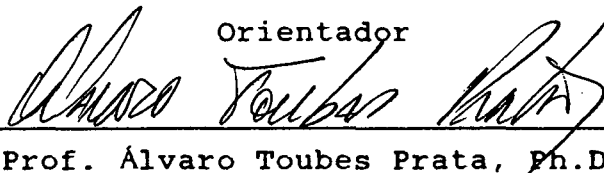
ESCOAMENTO LAMINAR ATRAVÉS DE VÁLVULAS EXCÊNTRICAS DE
COMPRESSORES DE REFRIGERAÇÃO

JOSÉ LUIZ GASCHE

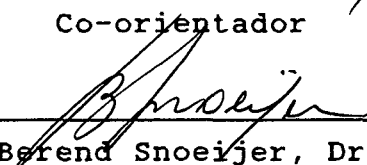
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS
TÉRMICAS, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE
PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA


Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.

Orientador

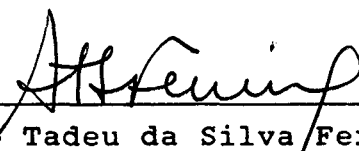

Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.

Co-orientador

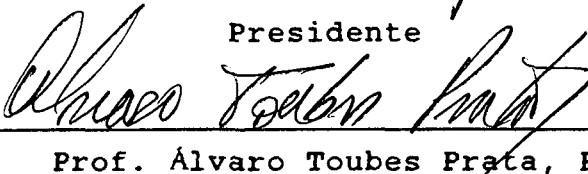

Prof. Berend Snoeijs, Dr.-Ing.

Coordenador do Curso

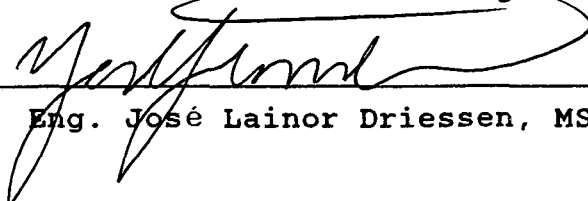
BANCA EXAMINADORA:


Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.

Presidente


Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.


Prof. Antonio Carlos Ribeiro Nogueira, D.Eng.


Eng. José Lainor Driessen, MSc.

A minha querida esposa Clotildes, pelo incansável apoio, dado em todos os instantes dedicados à realização deste trabalho, pelo indispensável carinho, pela compreensão nos momentos difíceis e, principalmente, pelo seu amor, sem os quais a realização deste trabalho não teria sido possível.

Aos meus queridos filhos Caroline e Gustavo pelo carinho dedicado, pela compreensão nas intermináveis horas de ausência e, principalmente, pela indispensável companhia.

Aos meus queridos pais, pelo esforço dispendido na minha formação profissional e pelo amor dedicado à minha formação moral, sem os quais, com certeza, não alcançaria mais este degrau.

Aos meus queridos irmãos por não terem tido as mesmas oportunidades que a mim foram conferidas.

AGRADECIMENTOS

Aos Profs. Rogério e Prata pela competência na orientação, pela atenção dispensada em todos os momentos exigidos e, principalmente, pela amizade.

Ao meu grande amigo Sérgio Peters pelo indispensável auxílio na parte numérica, pelas incansáveis discussões e pelo grande laço de amizade firmado.

Ao meu grande amigo Jauber Cavalcante de Oliveira pelas valiosas discussões, pela agradável companhia de sempre e pela amizade sincera.

Aos meus amigos Jean e Mário pelo indispensável auxílio na parte experimental.

Aos professores que contribuíram na minha formação e aos companheiros que me acompanharam durante a realização do curso.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da FEIS pela oportunidade oferecida e à CAPES pelo auxílio financeiro.

ÍNDICE

	pag.
RESUMO.....	i
ABSTRACT.....	ii
LISTA DE FIGURAS.....	iii
LISTA DE TABELAS.....	xi
SIMBOLOGIA.....	xii
1.INTRODUÇÃO.....	1
2.APARATO EXPERIMENTAL.....	6
2.1.Introdução.....	6
2.2.Descrição geral do aparato experimental.....	6
2.3.Secção de teste.....	8
2.3.1.Assento.....	8
2.3.2.Palheta.....	9
2.3.3.Sistema de posicionamento da palheta.....	11
2.3.4.Sistema para o controle do afastamento entre palheta e assento.....	12
2.4.Instrumentação.....	14
2.4.1.Medidas de pressão.....	14
2.4.2.Medidas de temperatura.....	16
2.4.3.Medidas de deslocamento.....	16
3.PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL E REDUÇÃO DOS DADOS.....	18
3.1.Introdução.....	18
3.2.Procedimento experimental.....	18
3.2.1.Calibração dos transdutores de pressão e deslocamento.....	18
3.2.2.Preparação inicial.....	19
3.2.3.Ajustes da posição de referência, do paralelismo e da concentricidade entre palheta e assento.....	20
3.2.4.Tomada de dados.....	24

	pag.
3.3.Redução de dados.....	25
4.ESCOAMENTO PARA PEQUENOS AFASTAMENTOS ENTRE PALHETA E ASSENTO.	28
4.1.Introdução.....	28
4.2.Formulação do problema.....	28
4.3.Metodologia de solução.....	34
4.4.Malha.....	38
4.5.Validação da solução numérica.....	42
4.5.1.Comparação com soluções analíticas.....	42
4.5.2.Comparação com os resultados experimentais.....	49
5.RESULTADOS NUMÉRICOS E COMENTÁRIOS.....	66
5.1.Introdução.....	66
5.2.Perfil radial de pressão sobre a palheta.....	66
5.3.Forças dimensional e adimensional sobre a palheta.....	71
5.4.Área efetica de força.....	74
5.5.Área efetiva de escoamento.....	76
5.6.Campo de velocidade.....	80
5.7.Campo de pressão.....	92
6.CONCLUSÃO.....	102
7.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	104
APÊNDICES.....	106
A.ANÁLISE DA INCERTEZA ASSOCIADA AOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS...	107
B.SISTEMA DE COORDENADAS BICILÍNDRICAS.....	117
C.DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES.....	129
D.OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS A PARTIR DAS EQUAÇÕES CORRESPONDENTES EM COORDENADAS BICILÍNDRICAS.....	146

RESUMO

O presente trabalho refere-se ao estudo numérico, com validação experimental, do escoamento laminar, incompressível e isotérmico de ar em um difusor radial excêntrico representando o modelo de laboratório de um sistema de válvula de compressores de refrigeração.

As equações governantes, escritas no sistema de coordenadas bicilíndricas, são discretizadas usando o método dos volumes finitos e solucionadas pelo algoritmo SIMPLE.

O modelo numérico é validado através de soluções analíticas de vários problemas mais simples e também pela comparação do perfil radial de pressão com resultados experimentais para o próprio difusor.

No procedimento experimental, apresenta-se, detalhadamente, a especificação de todos os equipamentos utilizados, assim como a metodologia usada durante a tomada de dados.

São gerados resultados numéricos para a verificação da influência da excentricidade sobre o perfil radial de pressão, força sobre a palheta e áreas efetivas de força e escoamento. Além disso, são mostradas algumas características do campo de velocidade e plotam-se alguns gráficos do campo de pressão sobre a palheta.

Observou-se que a presença da excentricidade no modelamento da válvula, embora modifique significativamente os campos de velocidade e pressão, não altera sensivelmente os parâmetros globais do escoamento como força e áreas efetivas de força e escoamento. Verificou-se, ainda, que, para afastamentos e números de Reynolds mais elevados, a presença de grandes regiões de recirculação inverte a tendência normal do comportamento dos parâmetros investigados.

ABSTRACT

The present work deals with the validated numerical analysis of the laminar, incompressible and isothermal air flow through an eccentric radial diffuser. The main motivation for this study comes from the fact that this geometry represents a laboratory model of a refrigerating compressor valve system.

The governing equations expressed in a bicylindrical coordinate system are discretized using the method of finite volumes and solved by means of the SIMPLE algorithm.

The numerical model has been validated using both analytical solutions of simple related problems and also through the comparison of the numerical and experimental results of the eccentric radial diffuser flow.

All the experimental procedures including the specification of all the equipment used to get the experimental data, the description of the whole test rig and the methodology used during the data acquisition process is completely described.

Numerical results showing the influence of the eccentricity on the pressure radial distribution, the total force on the disks and the effective flow and force areas are calculated. Velocity and pressure distribution are also shown in order to emphasize certain characteristics of the flow field.

Although the presence of the eccentricity between disks significantly modifies both the pressure and the velocity fields, the integrated global parameters such as the force on the disks and the effective flow and force areas show only small influence. It has been verified that for higher gaps between disks and for high Reynolds numbers, the recirculation region reverses the trend of the behavior of the investigated parameters when compared to low Reynolds numbers flows and small gaps.

LISTA DE FIGURAS

	pag.
Fig. 1.1 - Sistema de válvula de um compressor de refrigeração.	2
Fig. 1.2 - Geometria para o escoamento em difusor radial concêntrico.....	3
Fig. 1.3 - Geometria proposta no presente trabalho para o estudo de válvulas de compressores.....	4
Fig. 2.1 - Vista geral do aparato experimental.....	7
Fig. 2.2 - Secção de teste.....	9
Fig. 2.3 - Palheta utilizada para a medição do perfil de pressão.....	10
Fig. 2.4 - Sistema de posicionamento da palheta.....	11
Fig. 2.5 - Sensibilidade do escoamento com o afastamento s para $Re=2000$ e $s=0,30 \pm 0,01$ mm.....	12
Fig. 3.1 - Resultados experimentais para $Re_m=2041$, $s/d=0,0108$ e $e=0$	22
Fig. 3.2 - Resultados experimentais. para $Re_m=2041$, $s/d=0,0108$ e $e=17,319$ mm.....	23
Fig. 3.3 - Resultados experimentais para $Re_m=3036$, $s/d=0,011$ e $e=0$	23
Fig. 3.4. - Resultados experimentais para $Re_m=3036$, $s/d=0,011$ e $e=17,319$ mm.....	24
Fig. 4.1 - Palhetas de válvula de descarga (1-4) e sucção (5,6) e esquema de um sistema de válvula de compressores de refrigeração (7).....	29
Fig. 4.2 - Geometria do escoamento.....	30
Fig. 4.3 - Domínio de cálculo do escoamento.....	33
Fig. 4.4 - Volume de controle principal para a integração das equações diferenciais.....	35

	pag.
Fig. 4.5 - Volume de controle para a velocidade u.....	36
Fig. 4.6 - Primeira malha utilizada.....	40
Fig. 4.7 - Malha utilizada na obtenção das soluções numéricas..	41
Fig. 4.8 - Geometria do escoamento para o cilindro em rotação..	43
Fig. 4.9 - Solução numérica para o perfil de pressão para o problema do cilindro em rotação - computação em coordenadas cilíndricas e bicilíndicas.....	44
Fig. 4.10 - Perfil de velocidade do escoamento para o problema do cilindro em rotação.....	44
Fig. 4.11 - Perfil radial de pressão para o problema do cilindro em rotação.....	45
Fig. 4.12 - Escoamento axial entre tubos concêntricos.....	46
Fig. 4.13 - Perfil axial de pressão para o escoamento entre tubos concêntricos.....	46
Fig. 4.14 - Geometria do escoamento para o difusor radial centrado.....	47
Fig. 4.15 - Comparação entre as soluções analítica e numérica do perfil radial de pressão sobre a palheta na região do difusor para $Re = 70$ e $s/d = 0,01$	48
Fig. 4.16 - Malha 14x54x40.....	50
Fig. 4.17 - Malha 22x54x40.....	51
Fig. 4.18 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1506$, $s/d=0,0161$ e $e=0$	52
Fig. 4.19 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3077$, $s/d=0,011$ e $e=0$	52
Fig. 4.20 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2059$, $s/d=0,0108$ e $e=5,323$ mm.....	53

	pag.
Fig. 4.21 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1007$, $s/d=0,0104$ e $e=10,578$ mm....	53
Fig. 4.22 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3094$, $s/d=0,011$ e $e=10,578$ mm.....	54
Fig. 4.23 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2044$, $s/d=0,0107$ e $e=15,676$ mm....	54
Fig. 4.24 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3042$, $s/d=0,011$ e $e=15,676$ mm.....	55
Fig. 4.25 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1563$, $s/d=0,0201$ e $e=0$	55
Fig. 4.26 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2033$, $s/d=0,0201$ e $e=0$	56
Fig. 4.27 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1086$, $s/d=0,0200$ e $e=10,578$ mm....	56
Fig. 4.28 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2056$, $s/d=0,0201$ e $e=10,578$ mm....	57
Fig. 4.29 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2561$, $s/d=0,0201$ e $e=0$	57
Fig. 4.30 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3035$, $s/d=0,0201$ e $e=10,578$ mm....	58
Fig. 4.31 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3040$, $s/d=0,0201$ e $e=5,323$ mm.....	58
Fig. 4.32 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1574$, $s/d=0,0200$ e $e=15,676$ mm....	59
Fig. 4.33 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2058$, $s/d=0,021$ e $e=17,319$ mm.....	59
Fig. 4.34 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1491$, $s/d=0,025$ e $e=0$	60

	pag.
Fig. 4.35 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3052$, $s/d=0,0251$ e $e=0$	60
Fig. 4.36 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1484$, $s/d=0,025$ e $e=10,578$ mm.....	61
Fig. 4.37 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2039$, $s/d=0,025$ e $e=10,578$ mm.....	61
Fig. 4.38 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2037$, $s/d=0,025$ e $e=17,319$ mm.....	62
Fig. 4.39 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re_m=3036$, $s/d=0,011$ e $e=0$	63
Fig. 4.40 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re_m=3036$, $s/d=0,011$ e $e=17,319$ mm....	63
Fig. 4.41 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re_m=2041$, $s/d=0,0108$ e $e=0$	64
Fig. 4.42 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re_m=2041$, $s/d=0,0108$ e $e=17,319$ mm...	64
Fig. 5.1 - Perfil adimensional de pressão para $Re=500$ e $s/d=0,01$	67
Fig. 5.2 - Perfil adimensional de pressão para $Re=500$ e $s/d=0,03$	68
Fig. 5.3 - Perfil adimensional de pressão para $Re=1500$ e $s/d=0,01$	68
Fig. 5.4 - Perfil adimensional de pressão para $Re=1500$ e $s/d=0,03$	69
Fig. 5.5 - Perfil adimensional de pressão para $Re=3000$ e $s/d=0,01$	69
Fig. 5.6 - Perfil adimensional de pressão para $Re=3000$ e $s/d=0,03$	70

Fig. 5.7 - Força dimensional em função da excentricidade para $s/d=0,01$	72
Fig. 5.8 - Força dimensional em função da excentricidade para $s/d=0,03$	72
Fig. 5.9 - Força adimensional sobre a palheta para $s/d=0,01$	73
Fig. 5.10 - Força adimensional sobre a palheta para $s/d=0,03$...	74
Fig. 5.11 - Área efetiva de força adimensional para $s/d=0,01$...	75
Fig. 5.12 - Área efetiva de força adimensional para $s/d=0,03$...	76
Fig. 5.13 - Sistema de válvula de um compressor de refrigeração e sua área efetiva de escoamento.....	77
Fig. 5.14 - Escoamento no orifício equivalente.....	77
Fig. 5.15 - Área efetiva de escoamento adimensional para $s/d=0,01$	79
Fig. 5.16 - Área efetiva de escoamento adimensional para $s/d=0,03$	79
Fig. 5.17 - Perfis de velocidade w no orifício para $Re=1500$, $s/d=0,01$ e $e=5$ mm.....	80
Fig. 5.18 - Perfis de velocidade w no orifício para $Re=1500$, $s/d=0,01$, $e=5$ mm.....	81
Fig. 5.19 - Perfis de velocidade w no orifício para $Re=1500$, $s/d=0,03$ e $e=5$ mm.....	81
Fig. 5.20 - Perfis de velocidade w no orifício para $Re=1500$, $s/d=0,03$, $e=5$ mm.....	82
Fig. 5.21. Posições referentes aos perfis de velocidade w no orifício de passagem para $\psi=0$ e $\psi=180^\circ$	82
Fig. 5.22 - Perfis de velocidade v no difusor para $Re=1500$, $s/d=0,01$, $\psi=0$ e $e=5$ mm.....	83

Fig. 5.23 - Perfis de velocidade v no difusor para $Re=1500$, $s/d=0,03$, $\psi=0$ e $e=5$ mm.....	84
Fig. 5.24 - Perfis de velocidade v no difusor para $Re=3000$, $s/d=0,01$, $\psi=0$ e $e=5$ mm.....	84
Fig. 5.25 - Perfis de velocidade v no difusor para $Re=3000$, $s/d=0,03$, $\psi=0$ e $e=5$ mm.....	85
Fig. 5.26 - Posições referentes aos perfis de velocidade v no difusor para $\psi=0$ ($I=2$).....	85
Fig. 5.27 - Distribuição circunferencial da velocidade média na entrada do difusor para $Re=500$ e $s/d=0,01$	87
Fig. 5.28 - Distribuição circunferencial da velocidade média na saída do difusor para $Re=500$ e $s/d=0,01$	88
Fig. 5.29 - Comprimento de separação para $Re=500$ e $s/d=0,03$	89
Fig. 5.30 - Comprimento de separação para $Re=1500$ e $s/d=0,01$...	89
Fig. 5.31 - Comprimento de separação para $Re=3000$ e $s/d=0,01$...	90
Fig. 5.32 - Comprimento de separação para $Re=3000$ e $s/d=0,03$...	90
Fig. 5.33 - Comprimento de separação em função do número de Reynolds para $e=0$	91
Fig. 5.34 - Comprimento de separação em função do número de Reynolds para $e = 15$ mm.....	91
Fig. 5.35 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=500$, $s/d=0,01$ e $e=0$	93
Fig. 5.36 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=500$, $s/d=0,01$ e $e=0$	93
Fig. 5.37 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=500$, $s/d=0,01$ e $e=10$ mm.....	94
Fig. 5.38 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=500$, $s/d=0,01$ e $e=10$ mm.....	94

	pag.
Fig. 5.39 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=500$, $s/d=0,03$ e $e=5$ mm.....	95
Fig. 5.40 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=500$, $s/d=0,03$ e $e=5$ mm.....	95
Fig. 5.41 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=500$, $s/d=0,03$ e $e=15$ mm.....	96
Fig. 5.42 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=500$, $s/d=0,03$ e $e=15$ mm.....	96
Fig. 5.43 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=1500$, $s/d=0,01$ e $e=10$ mm.....	97
Fig. 5.44 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=1500$, $s/d=0,01$ e $e=10$ mm.....	97
Fig. 5.45 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=1500$, $s/d=0,03$ e $e=10$ mm.....	98
Fig. 5.46 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=1500$, $s/d=0,03$ e $e=10$ mm.....	98
Fig. 5.47 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=3000$, $s/d=0,01$ e $e=5$ mm.....	99
Fig. 5.48 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=3000$, $s/d=0,01$ e $e=5$ mm.....	99
Fig. 5.49 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=3000$, $s/d=0,03$ e $e=5$ mm.....	100
Fig. 5.50 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=3000$, $s/d=0,03$ e $e=5$ mm.....	100
Fig. 5.51 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=3000$, $s/d=0,03$ e $e=15$ mm.....	101
Fig. 5.52 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=3000$, $s/d=0,03$ e $e=15$ mm.....	101

	pag.
Fig. B.1 - Parâmetros principais do sistema de coordenadas bicilíndricas.....	118
Fig. B.2 - Circunferência $\eta = \text{constante}$ com centro em $(x,y) = (t,0)$	121
Fig. B.3 - Representação da coordenada ψ	123
Fig. B.4 - Sistema de coordenadas bicilíndricas aplicado à geometria do difusor radial excêntrico.....	128
Fig. C.1 - Volume de controle para a integração da equação da conservação da massa.....	130
Fig. C.2 - Volume de controle para a velocidade u	132
Fig. C.3 - Volume de controle para a velocidade v	137
Fig. C.4 - Volume de controle para a velocidade w	139
Fig. C.5 - Volumes de controle descontraídos para u e p	140

LISTA DE TABELAS

	pag.
Tabela 2.1 - Alteração do afastamento provocada pelo campo de pressão sobre a palheta e assento.....	13
Tabela A.1 - Incerteza associada à medição dos parâmetros primários.....	108
Tabela A.2 - Incertezas associadas aos parâmetros envolvidos no experimento.....	115

SIMBOLOGIA

a	parâmetro que define o foco das coordenadas ψ no sistema de coordenadas bicilíndricas.
A_{ee}	área efetiva de escoamento.
A_{eea}	área efetiva de escoamento adimensional.
A_{ef}	área efetiva de força.
A_{efa}	área efetiva de força adimensional.
d	diâmetro do orifício de passagem.
d_c	diâmetro da canalização.
d_0	diâmetro do orifício medidor.
D	diâmetro da palheta.
DP_{or}	queda de pressão no orifício medidor.
DP_v	queda de pressão através da válvula.
e	excentricidade entre palheta e assento.
e_0	excentricidade entre o eixo de coordenadas z e o orifício de passagem.
F	força dimensional.
F_{ad}	força adimensional.
g	aceleração da gravidade ($9,80665 \text{ m/s}^2$).
g_ψ	métrica do sistema bicilíndrico na direção ψ .
g_η	métrica do sistema bicilíndrico na direção η .
g_z	métrica do sistema bicilíndrico na direção z .
h	raiz quadrada das métricas g_ψ e g_η .
\bar{h}	valor de h no ponto médio do volume de controle discretizado.
h_p	valor de h no ponto p do volume de controle discretizado.
h_w	queda de pressão no orifício medidor ($\text{cm H}_2\text{O}$).
k	C_p/C_v para o ar (1,4)
l	comprimento do orifício de passagem.
L	leitura do manômetro.

\dot{m}	fluxo de massa do escoamento.
M	massa molecular do ar (28,98 kg/kg-mol).
p	pressão.
p^*	pressão adimensional.
p_{atm}	pressão atmosférica.
p_d	pressão absoluta de descarga da válvula.
p_{mo}	pressão absoluta a montante do orifício medidor.
p_{mv}	pressão absoluta a montante da válvula.
p_u	pressão absoluta a montante do orifício equivalente.
R	constante do ar (286,9 J/kg K).
\bar{R}	constante universal dos gases (8314,3 J/kg-mol K).
Re	número de Reynolds no orifício de passagem.
Re_m	número de Reynolds médio.
s	afastamento entre palheta e assento.
s_{cor}	correção do afastamento.
s_{aj}	afastamento ajustado.
t	parâmetro do sistema de coordenadas bicilíndricas que define o centro do círculo η constante.
t'	parâmetro do sistema de coordenadas bicilíndricas que define o centro do círculo ψ constante.
T_{amb}	temperatura ambiente.
T_u	temperatura a montante do orifício equivalente.
u	componente da velocidade na direção ψ .
v	componente da velocidade na direção η .
V_m	velocidade média na secção transversal do difusor numa determinada posição η .
V_ψ	velocidade v numa determinada posição ψ .
\bar{v}	velocidade média do escoamento no interior da canalização.
w	componente da velocidade na direção z .
\bar{w}	velocidade média do escoamento no orifício de passagem.

x, y, z	coordenadas do sistema cartesiano.
ψ, η, z	coordenadas do sistema bicilíndrico.
η_1	coordenada do círculo que define o diâmetro da palheta.
η_2	coordenada do círculo que define o diâmetro do orifício de passagem.
ρ	massa específica do ar.
ρ_m	massa específica do fluido do manômetro.
μ	viscosidade absoluta do ar.
β	relação entre os diâmetros do orifício do medidor de vazão e da canalização.
ΔS_η	comprimento de separação.

1. INTRODUÇÃO

Até o final do século XVIII e parte do século XIX, os métodos de projeto de compressores eram principalmente de natureza empírica. Somente no final do século XIX é que os procedimentos de projeto foram complementados com algum conhecimento teórico.

No início do século XX houve um certo refinamento desses métodos. Contudo, foi o constante aumento da velocidade dos compressores que trouxe a necessidade de procedimentos de projetos bem fundamentados, especialmente após a segunda guerra mundial. O projeto da válvula tornou-se um dos aspectos mais importantes no projeto do compressor.

Nas últimas décadas, com a maior facilidade de acesso a computadores de alta velocidade e de grande capacidade de memória, ocorreu um enorme progresso na simulação numérica de muitos aspectos da operação do compressor, possibilitando uma melhoria acentuada em seu projeto. Com isso, surgiu a necessidade de se conhecer, com maior profundidade, os fenômenos físicos que ocorrem nos diversos componentes do compressor, visando seu melhor modelamento matemático.

O ciclo de operação de um compressor de deslocamento positivo de alta velocidade pode ser descrito por uma série de fenômenos complexos, interagindo e ocorrendo em um curto período de tempo. O modelo matemático que descreve estes fenômenos envolve, entre outras, uma equação para o funcionamento dinâmico da palheta da válvula.

Neste contexto, o conhecimento do escoamento do gás através da válvula é de fundamental importância, visto que é a força causada pelo próprio escoamento a responsável pelo movimento da palheta. A Fig. 1.1 apresenta um esquema do sistema de válvulas geralmente usado em um compressor de refrigeração.

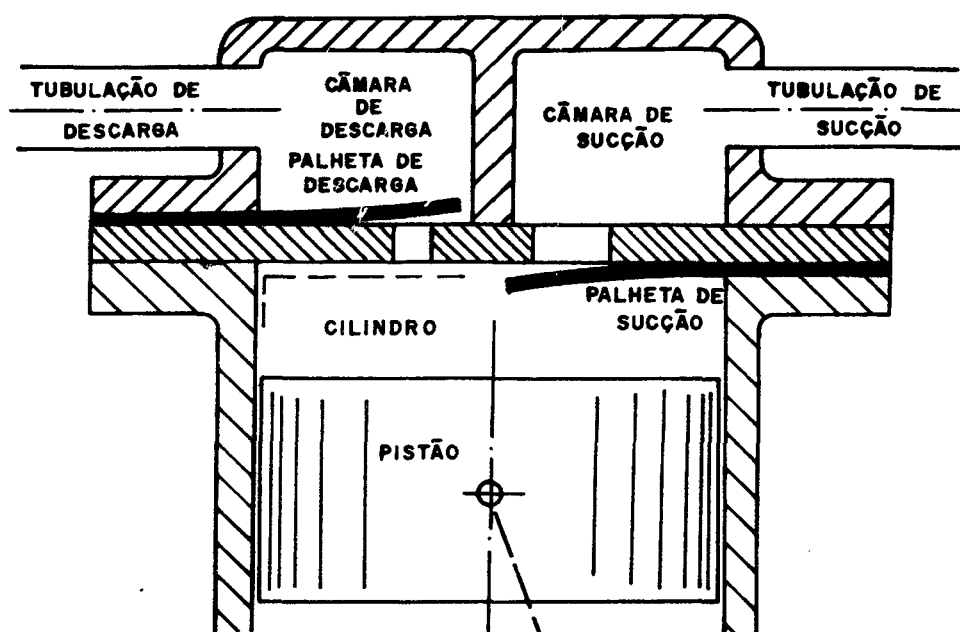


Fig. 1.1- Sistema de válvula de um compressor de refrigeração

Como pode ser observado, a diferença de pressão existente entre o interior do cilindro e as câmaras de sucção ou descarga provoca o aparecimento de uma força resultante atuando sobre as palhetas. É a atuação desta força a responsável pela abertura e fechamento das válvulas.

Deschamps [01] analisou numericamente, com validação experimental, o escoamento laminar, incompressível e isotérmico de ar em difusores radiais concêntricos visando o estudo de válvulas de compressores. Em seu trabalho, Deschamps apresenta uma extensa revisão bibliográfica referente ao assunto. O modelo básico usado para a geometria do escoamento foi um difusor radial composto de dois discos paralelos e concêntricos, sendo que em um deles há um orifício de passagem do fluido, responsável pela alimentação do difusor radial. A Fig. 1.2 apresenta o esquema da geometria utilizada por Deschamps.

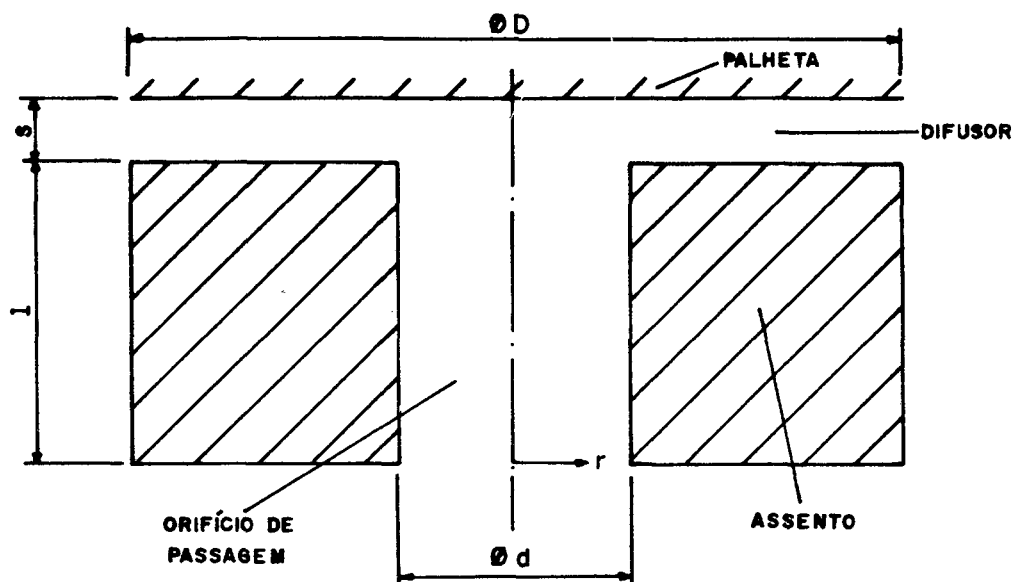


Fig. 1.2 - Geometria para o escoamento em difusor radial concêntrico.

Com o intuito de aperfeiçoar a modelação do escoamento na válvula, tornando-o mais próximo da situação real da maioria dos sistemas de válvula de compressores de refrigeração, propõe-se, neste trabalho, a análise do escoamento de ar através de um difusor radial excêntrico, cujo esquema pode ser visto na Fig. 1.3.

Observa-se que a existência da excentricidade entre a palheta e o orifício de passagem provoca o surgimento de regiões circunferenciais de recobrimento distintas, causando uma distribuição não uniforme do fluxo de massa que deixa o orifício de passagem. O escoamento se adapta à nova geometria de tal forma que a velocidade principal na região do difusor, v , aumenta progressivamente da região (2) para a região (1). Este fato conduz a uma distribuição de pressão assimétrica sobre a palheta e o escoamento torna-se tridimensional.

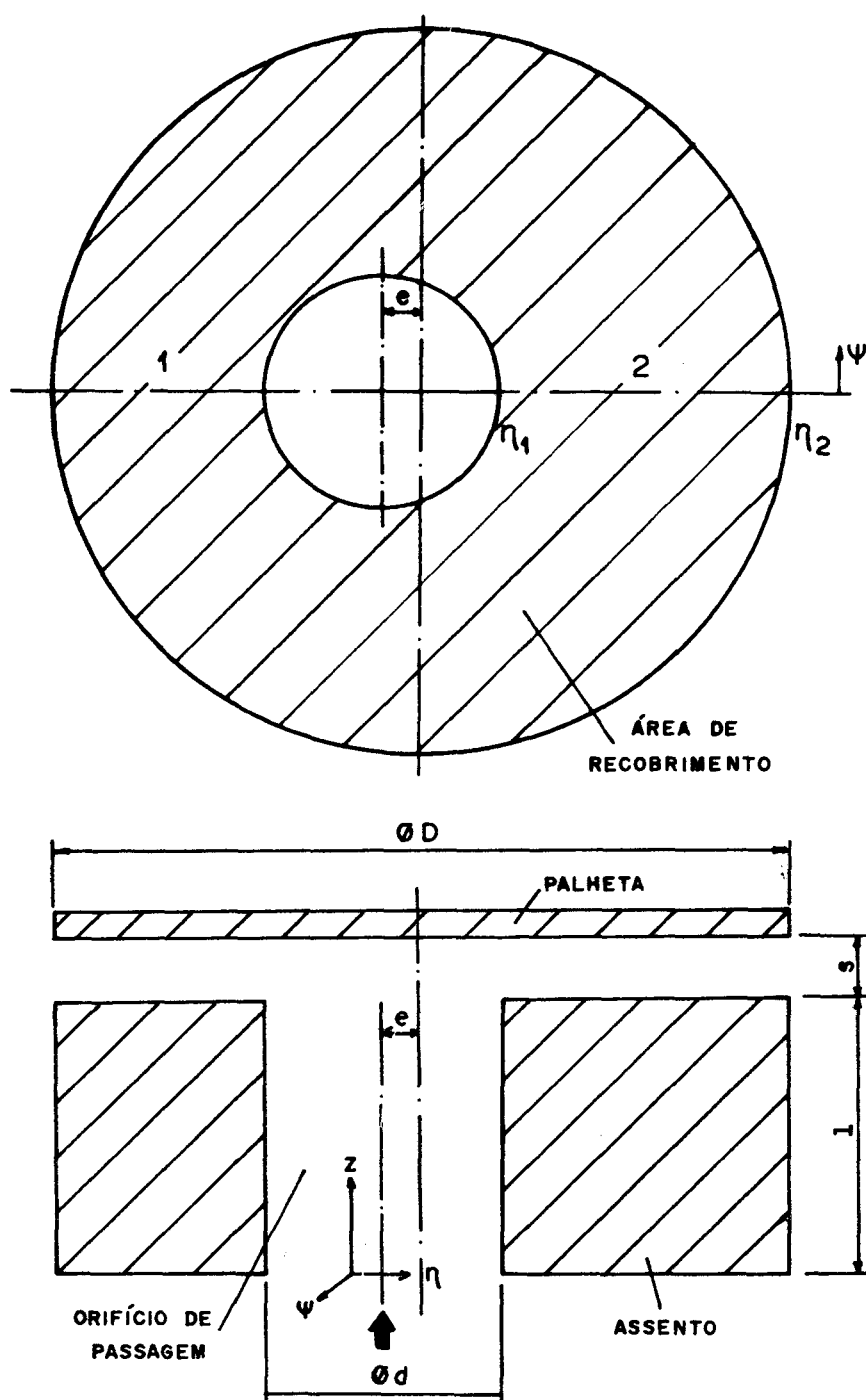


Fig. 1.3 - Geometria proposta no presente trabalho para o estudo de válvulas de compressores.

O principal objetivo do presente trabalho é estudar numericamente o escoamento laminar, incompressível, isotérmico e em regime permanente de ar em difusores radiais excêntricos após a validação experimental do modelo numérico. No método numérico, as

equações governantes foram discretizadas usando-se volumes finitos e resolvidas pelo algoritmo SIMPLE [02]. Apresenta-se, entre outros, resultados numéricos para o campo de pressão sobre a palheta, força sobre a palheta, áreas efetivas de força e escoamento e algumas características do campo de velocidade. Os resultados numéricos foram gerados para números de Reynolds iguais a 500, 1500 e 3000, afastamentos adimensionais de 0,01 e 0,03 e excentricidades de 0, 5, 10 e 15 mm.

Descreve-se, detalhadamente, todos os equipamentos usados na bancada experimental e a metodologia adotada no procedimento experimental e redução de dados.

A análise dos resultados mostra uma grande sensibilidade do campo de pressão sobre a palheta em relação ao afastamento entre palheta e assento, s , e ao número de Reynolds. No entanto, apesar da existência de um campo assimétrico de pressão sobre a palheta, os valores de força e áreas efetivas de força e escoamento não variam acentuadamente com a excentricidade, e .

2. APARATO EXPERIMENTAL

2.1. Introdução

Neste capítulo apresenta-se uma descrição completa do aparato experimental. Inicialmente descreve-se, de forma geral, toda a bancada experimental e, em seguida, a secção de teste é detalhada. Finalmente, é apresentada toda a instrumentação utilizada durante a realização do experimento.

2.2. Descrição geral do aparato experimental

A Fig. 2.1 mostra uma fotografia e uma vista esquemática do aparato experimental.

O fluido de trabalho utilizado na realização do experimento, ar, é inicialmente armazenado em três reservatórios de 450 l ligados em série. A pressão de armazenamento é escolhida de tal forma a proporcionar uma vazão de ar praticamente constante durante a tomada de dados. O abastecimento de ar para os reservatórios é feito por um compressor alternativo (Wayne), de dois estágios, modelo W7208-H , série 2647, com pressão máxima de $1,2 \times 10^6$ Pa.

Uma mangueira flexível é utilizada para conectar os reservatórios à canalização com a finalidade de evitar que vibrações provocadas pelo funcionamento do compressor sejam transmitidas ao restante da bancada.

Como será visto mais adiante, o experimento é muito sensível a variações do afastamento entre palheta e assento. Devido a este fato, a válvula reguladora de vazão (Festo), tipo 2103 GR-3/4, série 985 R, é instalada junto aos reservatórios. Tenta-se evitar, assim, que forças externas, provenientes do manuseio da válvula possam

provocar alterações tanto no afastamento quanto no paralelismo entre palheta e assento.

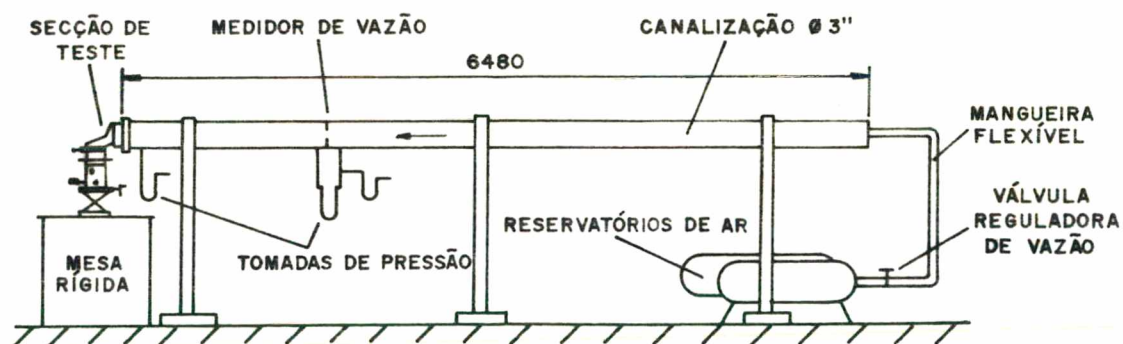
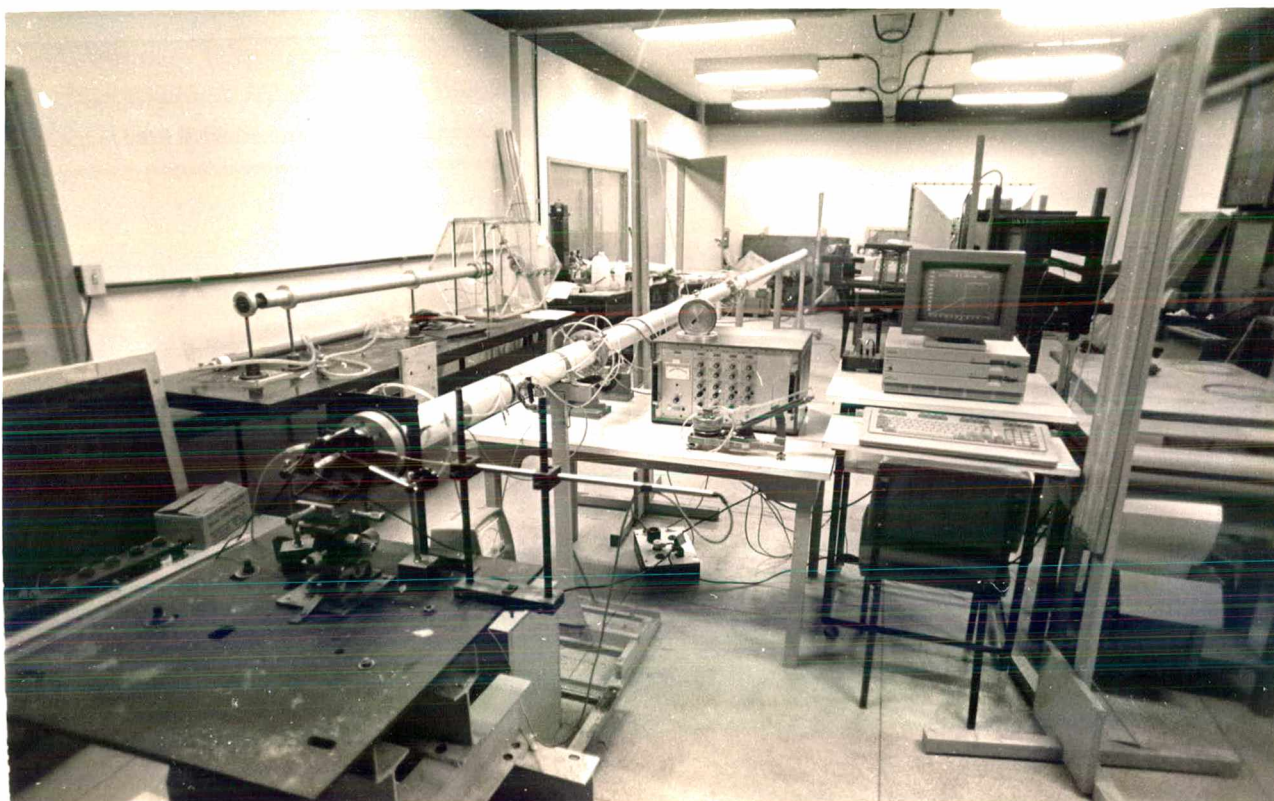


Fig. 2.1 - Vista geral do aparato experimental.

O escoamento de ar ocorre através de uma canalização de PVC de três polegadas de diâmetro, onde é instalado um medidor de vazão tipo placa de orifício de bordas quadradas com as tomadas de pressão a montante a $1 D_0$, e a jusante a $1/2 D_0$. Os demais componentes são especificados e montados segundo normas da ASME [03]. Deschamps [01] apresenta uma autoverificação do orifício medidor de vazão utilizado neste trabalho.

A montante do assento existe uma tomada de pressão ligada a um manômetro de água tipo tubo em "U". A pressão a montante do assento é utilizada no cálculo da massa específica do ar usada na adimensionalização da pressão.

2.3. Secção de teste

A Fig. 2.2 mostra uma fotografia da secção de teste onde podem ser vistos o assento, a palheta, seu sistema de posicionamento e o sistema para o controle do afastamento entre palheta e assento.

As relações utilizadas no experimento para o diâmetro da palheta D , diâmetro do orifício d e comprimento do orifício l são $l/d=0,933$ e $D/d=3$.

2.3.1. Assento

O assento possui um diâmetro externo de 146 mm e 28 mm de espessura. O diâmetro do orifício de passagem do ar para o difusor, d , é de 30 mm.

A fixação do assento à extremidade da canalização é feita por meio de um flange que, por sua vez, é fixo por um suporte metálico a uma base rígida que suporta todo o sistema de posicionamento. Para evitar vazamentos de ar entre o flange e o assento, é instalada uma

junta de cortiça impregnada com graxa. Para evitar a corrosão e o surgimento de incrustações no assento o material escolhido para a sua fabricação é o alumínio. Além disso, a superfície que faz contato direto com o escoamento é polida na tentativa de minimizar a influência das irregularidades capazes de perturbar o escoamento.

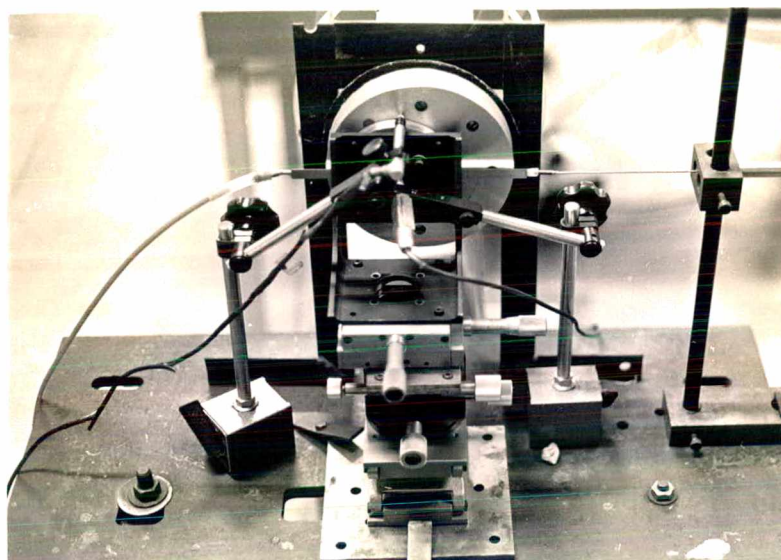


Fig. 2.2 - Secção de teste.

2.3.2. Palheta

A palheta, mostrada na Fig. 2.3, é fabricada em aço inoxidável e possui suas superfícies retificadas para evitar ao máximo a perturbação do escoamento, assim como para manter sua planicidade em níveis desejáveis, ± 10 microns. Ela é composta por uma base onde são fixadas, através de parafusos, duas meias-luas chanfradas. Entre elas é montado um cursor, do mesmo material e retificado, que possui a liberdade de se mover diametralmente ao longo do rasgo formado pelas meias-luas. O cursor deve ser ajustado de tal forma a ficar suficientemente livre para se mover e ao mesmo tempo sem folga demasiada para causar o desnivelamento entre as partes da palheta.

Este ajuste é realizado pelos parafusos fixadores das meias-luas na base da palheta.

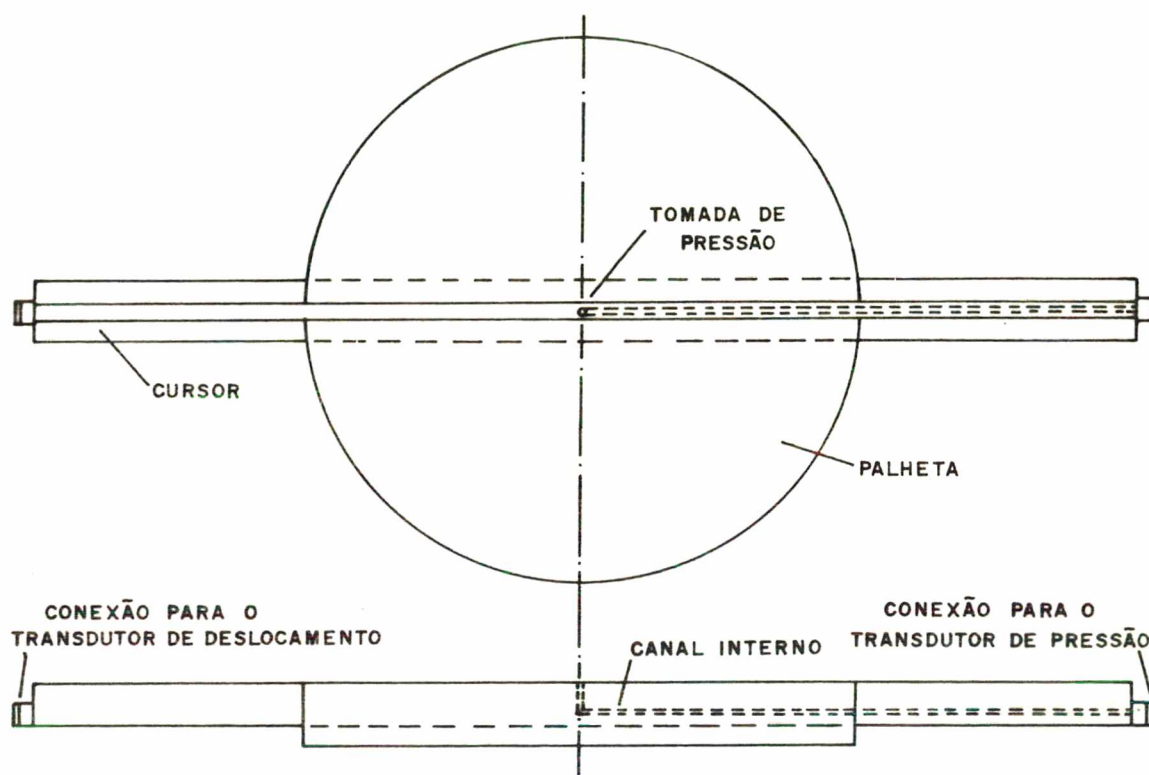


Fig. 2.3 - Palheta utilizada para a medição do perfil de pressão

No centro do cursor existe uma tomada de pressão que é interligada a uma das extremidades por um canal interno. Nesta extremidade é conectado um transdutor indutivo de pressão. Na extremidade oposta é conectado um transdutor indutivo de deslocamento, responsável pela leitura da posição radial instantânea da tomada de pressão. Os dois transdutores são ligados a uma ponte amplificadora de sinal que, por sua vez, está conectada a um microcomputador através de um conversor analógico/digital. Os sinais são tratados por um programa de aquisição de dados escrito em linguagem BASIC, capaz de registrar os sinais de pressão a cada distância de 0,5 mm. Desta forma, é possível obter uma distribuição radial de pressão praticamente contínua sobre a palheta.

2.3.3. Sistema de posicionamento da palheta.

O sistema de posicionamento da palheta é uma das partes as mais importantes de todo o aparato experimental e, por isso, seu manuseio deve ser feito com muito cuidado e habilidade. É através dele que se posiciona a palheta no afastamento, s , e excentricidade, e , desejados.

Devido a sua mobilidade e precisão de movimento consegue-se um bom ajuste do paralelismo e concentricidade entre palheta e assento.

A Fig. 2.4 mostra o sistema de posicionamento da palheta. Basicamente, ele é composto de três mesas de deslocamento micrométrico, uma mesa de deslocamento angular e uma mesa de elevação.

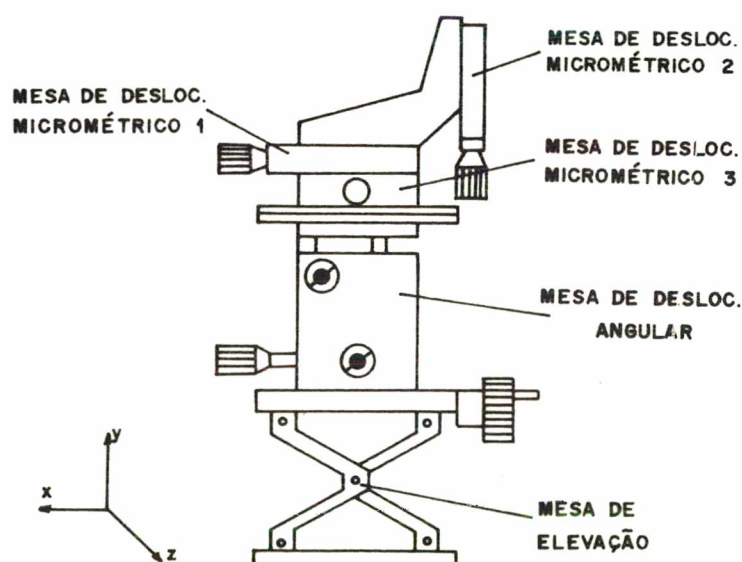


Fig. 2.4 - Sistema de posicionamento da palheta.

As mesas 1, 2 e 3 permitem o deslocamento da palheta nas direções dos eixos x , y e z , respectivamente, enquanto a rotação em torno deles é realizada pela mesa de deslocamento angular.

A palheta é fixada ao suporte através de parafusos e o sistema assim constituído é fixo a uma base rígida, também, através de parafusos.

2.3.4. Sistema para o controle do afastamento entre palheta e assento

A Fig. 2.5 mostra a distribuição de pressão obtida numericamente para $Re=2000$ e três afastamentos distintos. A diferença entre cada um deles é de $0,01$ mm. A análise desta figura permite observar a grande sensibilidade do escoamento em relação ao afastamento entre palheta e assento. Como se verá mais adiante, esta sensibilidade é tanto maior quanto menor for o afastamento, s . Entre os afastamentos extremos verifica-se uma diferença de, aproximadamente, 20% para a máxima pressão obtida.

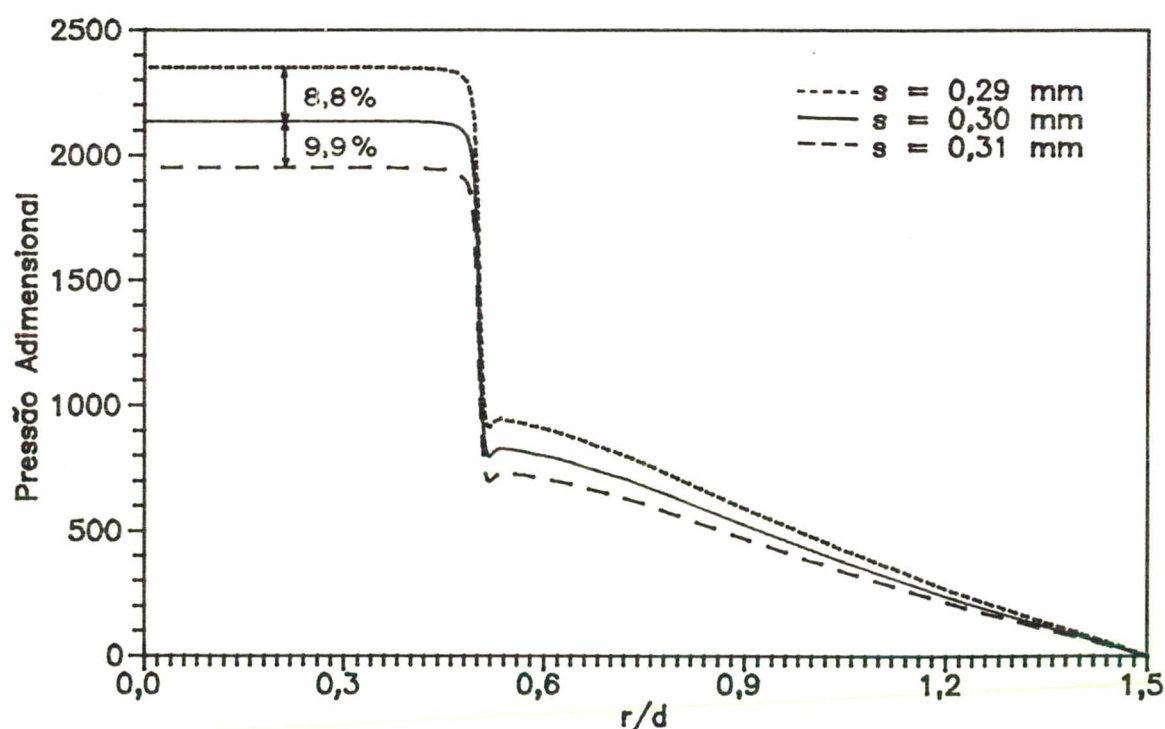


Fig. 2.5 - Sensibilidade do escoamento com o afastamento s para $Re=2000$ e $s=0,30 \pm 0,01$ mm.

Desta forma, existe a necessidade de determinar-se, com a máxima precisão possível, a localização da palheta em relação ao assento, ou seja, a distância s . O item 3.2.3 apresenta a metodologia utilizada na determinação deste parâmetro.

Tabela 2.1 - Alteração do afastamento provocada pelo campo de pressão sobre a palheta e assento.

s/d	Re	correção (μm)
0,010	3000	30
	2500	25
	2000	23
	1500	18
	1000	12
	500	9
0,020	3000	3 *
	2500	2 *
	2000	1,5 *
	1500	1,5 *
	1000	1,0 *
	500	1,0 *
0,025	500 a 3000	0

* valores não considerados para efeito de correção devido às imperfeições do sistema de medição e rigidez da secção de teste.

Um outro aspecto importante, especialmente quando se trabalha com pequenos afastamentos e números de Reynolds elevados, é a deformação de todo o sistema quando se inicia o escoamento. Isto acontece devido à própria distribuição de pressão sobre o assento e palheta causada pelo escoamento. Esta deformação provoca um

deslocamento relativo entre palheta e assento, alterando o afastamento inicialmente ajustado.

Para medir este deslocamento são instalados dois transdutores indutivos de deslocamento (apalpadores) fixos à base rígida por meio de duas bases magnéticas, sendo um na palheta e outro no assento. Os dois transdutores são ligados a um sistema analógico de leitura que fornece o valor da alteração do afastamento entre palheta e assento.

A tabela 2.1 mostra os valores obtidos para a alteração do afastamento, para vários afastamentos e números de Reynolds. Estes valores são utilizados para corrigir o afastamento entre palheta e assento.

2.4. Instrumentação

Apresenta-se, a seguir, os instrumentos utilizados nas medições dos parâmetros experimentais.

2.4.1. Medidas de pressão

As medidas de pressão são realizadas ao longo do diâmetro da palheta, na placa de orifício, a montante do assento e na atmosfera.

A distribuição de pressão na palheta é medida através de dois transdutores diferenciais indutivos de pressão (Hottinger Baldwin Messtechnik). Um deles, para pressões moderadas, com valor de fundo de escala de 0,01 bar e frequência máxima de 300 Hz e, um outro, para pressões mais elevadas, com valor de fundo de escala de 0,1 bar e frequência máxima de igual valor.

A pressão diferencial através da placa de orifício é medida

por um transdutor diferencial indutivo de pressão (HBM) com fundo de escala de 0,01 bar e frequência máxima de 300 Hz.

Os dois sinais de pressão anteriores são tratados com o auxílio de uma ponte amplificadora de sinal (HBM), modelo KWS/GE-5 e, então, transmitidos a um conversor analógico/digital (ANAMED), modelo am13PC, 12 bits de 16 entradas. Estes sinais são, posteriormente, recebidos por um microcomputador PC/XT (ITAUTEC), modelo IS30 II PLUS, de 640 kbytes de memória RAM e um clock de 8MHz, e tratados por um programa de aquisição de dados, fornecendo diretamente um gráfico do perfil radial de pressão na forma adimensional em função da posição da tomada de pressão. Este gráfico ainda fornece o número de Reynolds do escoamento e os valores dos parâmetros geométricos utilizados no experimento.

Para medir a pressão a montante da placa de orifício são utilizados dois tipos de manômetros. Para pequenas vazões usa-se um micromanômetro inclinado de álcool etílico tipo Wilhelm Lambrecht KG-Göttingen com fundo de escala de 190 mm, menor divisão de escala de 1 mm e quatro ângulos de inclinação: 1:25, 1:10, 1:5 e 1:2. Para vazões maiores, a pressão a montante da placa de orifício é medida por um manômetro tipo tubo em "U" de álcool etílico, com faixa de operação de 1000 mm e menor divisão de escala de 1 mm.

A pressão a montante do assento é medida por intermédio de um manômetro em "U" de água destilada, com faixa de operação de 1000 mm e menor divisão de escala de 1 mm.

A pressão atmosférica é medida utilizando-se um barômetro (Feingerätebau Fischer) modelo W2705, tipo 102, com faixa de operação de 900 a 1060 mbar e menor divisão de escala de 1 mbar.

2.4.2. Medidas de temperatura

Para a determinação das propriedades necessárias na redução dos dados mede-se a temperatura ambiente do ar, pois, a diferença entre esta e a temperatura do ar no escoamento é desprezível. Para isto, utiliza-se um termômetro de bulbo de mercúrio, com faixa de operação de -30 a 50°C e com a menor divisão de escala de 1°C .

2.4.3. Medidas de deslocamento

As medidas de deslocamento são efetuadas para a determinação do afastamento entre a palheta e assento, da excentricidade entre o orifício de passagem e a palheta e da posição instantânea da tomada de pressão, utilizada na obtenção do perfil radial de pressão.

O afastamento inicial, ou seja, aquele ajustado antes do início do escoamento e a excentricidade entre palheta e assento são determinados pelo sistema de posicionamento da palheta, composto por uma mesa de posicionamento (Spindler & Hoyer KG) modelo PO80 e duas mesas de deslocamento micrométrico (S & H) com faixa de operação até 25,00 mm e menor divisão de escala de 0,01 mm. Completam o sistema uma mesa de elevação de regulagem grosseira (S & H) modelo EL80 e uma cantoneira em "L" (S & H) modelo EQ80.02.

A correção do valor do afastamento, necessária devido à atuação do próprio escoamento, é determinada por meio de dois transdutores indutivos de deslocamento com apalpador (Tesa), tipo GT17, que são fixos, na base rígida, através de duas bases magnéticas (Mitutoyo). Os sinais dos transdutores são tratados por um sistema de medida de deslocamento com mostrador analógico (Tesa), tipo GND, com cinco escalas cujos fundos de escala são: ± 3 , ± 10 , ± 30 , ± 100 e ± 300

micrometros.

Para determinar a posição radial instantânea da tomada de pressão foi utilizado um transdutor indutivo de deslocamento com contato (HBM), modelo W100K, com faixa de operação de 100 mm. O sinal obtido pelo transdutor é, então, enviado ao microcomputador através da ponte amplificadora de sinal e do conversor analógico/digital.

3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL E REDUÇÃO DOS DADOS

3.1. Introdução

Este capítulo apresenta, de forma detalhada, o procedimento experimental, utilizado na tomada dos dados e sua redução aos parâmetros de interesse na análise do escoamento.

3.2. Procedimento experimental

3.2.1. Calibração dos transdutores de pressão e deslocamento

A calibração dos transdutores de pressão é efetuada através da medição, em paralelo, do valor de pressão existente sobre o transdutor, usando-se um manômetro considerado como padrão. O sinal elétrico do transdutor, após convertido em unidade de pressão, é comparado com a pressão lida no manômetro padrão. A curva de calibração é, então, levantada usando-se várias condições de escoamento.

Para efetuar a calibração do transdutor de pressão instalado no medidor de vazão tipo placa de orifício, utilizou-se um manômetro inclinado de álcool etílico tipo Wilhelm Lambrecht KG-Göttingen com fundo de escala de 190 mm, menor divisão de escala de 1 mm e quatro escalas: 1:25, 1:10, 1:5 e 1:2. Para tal, o transdutor é instalado na placa de orifício, da mesma maneira como é usado durante as tomadas dos dados, e a curva de calibração é levantada para várias vazões do escoamento.

A calibração dos transdutores de pressão, responsáveis pela medição da distribuição de pressão sobre a palheta, é realizada de maneira semelhante, com o transdutor instalado na tomada de pressão da

palheta. Para as pressões moderadas utilizou-se o transdutor com fundo de escala de 0,01 bar e para a sua calibração o mesmo manômetro inclinado descrito anteriormente. O transdutor com fundo de escala de 0,1 bar, usado na medição de pressões mais elevadas, é calibrado por um manômetro em "U" de álcool etílico, com fundo de escala de 1000 mm e menor divisão de escala de 1 mm.

O transdutor de deslocamento usado na determinação do posicionamento instantâneo da tomada de pressão da palheta é calibrado através de três marcações existentes no cursor, cada uma correspondendo a um deslocamento conhecido. O número reduzido de pontos não comprometeu a linearidade da curva de calibração e, simultaneamente, agilizou a execução do experimento.

É importante salientar que esta calibração é efetuada a cada novo posicionamento da palheta, isto é, a cada afastamento e excentricidade ajustados.

Após o levantamento das curvas de calibração, as equações ajustadas são introduzidas no programa de aquisição de dados usado durante a realização do experimento.

3.2.2. Preparação inicial

Antes de iniciar a tomada de dados é essencial para a obtenção de bons resultados que a bancada experimental seja adequadamente preparada.

Inicialmente, todas as conexões das tomadas de pressão são verificadas com relação a vazamentos de ar através da aplicação de espuma.

Posteriormente, as superfícies do assento e palheta são cuidadosamente limpas com benzina e as partes internas do cursor lubrificadas usando-se vaselina líquida, de maneira a permitir o

deslizamento suave do cursor. Este cuidado é muito importante para que a força exercida sobre o cursor para movê-lo não altere significativamente os ajustes de posicionamento da palheta.

A preparação segue com o ajuste grosseiro da concentricidade e paralelismo entre palheta e assento. Isto é feito através de um gabarito de papel recortado no diâmetro do assento e com o desenho concêntrico de um círculo do diâmetro da palheta. O gabarito é, então, colado ao assento e a palheta é aproximada a ele até que a folga existente entre os dois seja nula. Desta forma, através do sistema de posicionamento, consegue-se um ajuste grosseiro do paralelismo e da concentricidade entre a palheta e o assento.

Finalmente, os reservatórios são supridos com ar e procede-se o ajuste da posição de referência da palheta.

3.2.3. Ajustes da posição de referência, do paralelismo e da concentricidade entre palheta e assento

A rigor, os ajustes da posição de referência, da concentricidade e do paralelismo entre palheta e assento são realizados simultaneamente.

O ajuste da posição de referência é efetuado com o auxílio de uma esfera de aço inoxidável calibrada em $\varnothing 3,174$ mm. A palheta é recuada até uma determinada distância e a esfera é passada ao longo da folga agora existente entre palheta e assento. Simultaneamente, a palheta vai sendo ajustada de forma que o deslizamento da esfera seja o mais uniforme possível em toda posição. É importante salientar que este deslizamento deve ser feito com o mínimo de atrito possível. Isto aumenta a sensibilidade do experimentador ao deslizar a esfera, produzindo o ajuste adequado do paralelismo. Após conseguir-se um bom ajuste, a palheta é aproximada em 0,01 mm através da mesa micrométrica

1 do sistema de posicionamento. Isto se faz necessário pois, no processo de medição do diâmetro da esfera, existe uma compressão da mesma e, como a palheta é ajustada com o mínimo de atrito, isto é, com o mínimo de compressão, existe a necessidade de compensar a diferença.

Nesta posição da palheta, a leitura indicada pelo nônio da mesa micrométrica 1 é denominada de afastamento de referência. Somando a este o valor do diâmetro da esfera (3,174 mm), determina-se a posição de afastamento zero da palheta. Subtraindo deste o valor do afastamento desejado, encontra-se o valor a ser ajustado no nônio para a realização do experimento, s_{aj} .

Uma vez ajustada a posição da palheta no afastamento desejado, procede-se uma tomada de dados preliminar para a confirmação da concentricidade e paralelismo da palheta. Para o número de Reynolds mais elevado obtém-se uma distribuição da pressão sobre a palheta. Quanto melhor a simetria do perfil de pressão, maior será a concentricidade entre palheta e assento. Além disso, quanto mais horizontal for o patamar de pressão, melhor é o ajuste do paralelismo. Este ajuste refinado é feito para o maior número de Reynolds pois, diminuindo a vazão do escoamento o ajuste não se altera significativamente; o contrário, no entanto, não se verifica.

Caso o ajuste não esteja satisfatório, deve-se retornar ao ajuste do afastamento de referência com a esfera e repetir o processo.

A determinação do afastamento zero entre palheta e assento é essencial para a obtenção de bons resultados, especialmente para pequenos afastamentos.

Para estimar a precisão no ajuste desta posição, realizou-se dez medições da distribuição radial de pressão sobre a palheta, para várias configurações do escoamento. A cada medição a palheta é ajustada segundo o procedimento descrito anteriormente. As Figs. 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 apresentam os resultados obtidos.

Observando a Fig. 3.1 e os resultados numéricos apresentados na Fig. 2.5, pode-se dizer que a precisão do ajuste do afastamento da palheta é menor que 0,01 mm. As linhas mostradas referem-se aos valores máximo e mínimo das várias medições.

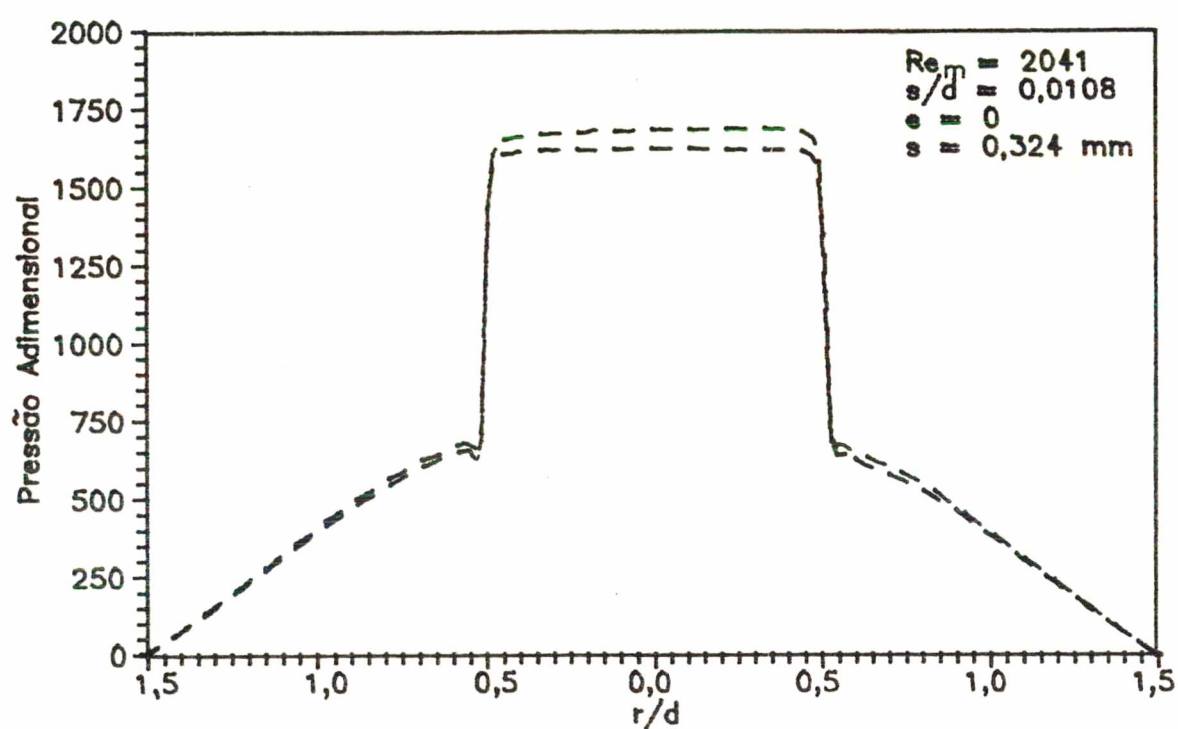


Fig. 3.1 - Resultados experimentais para $Re_m = 2041$, $s/d = 0,0108$ e $e = 0$.

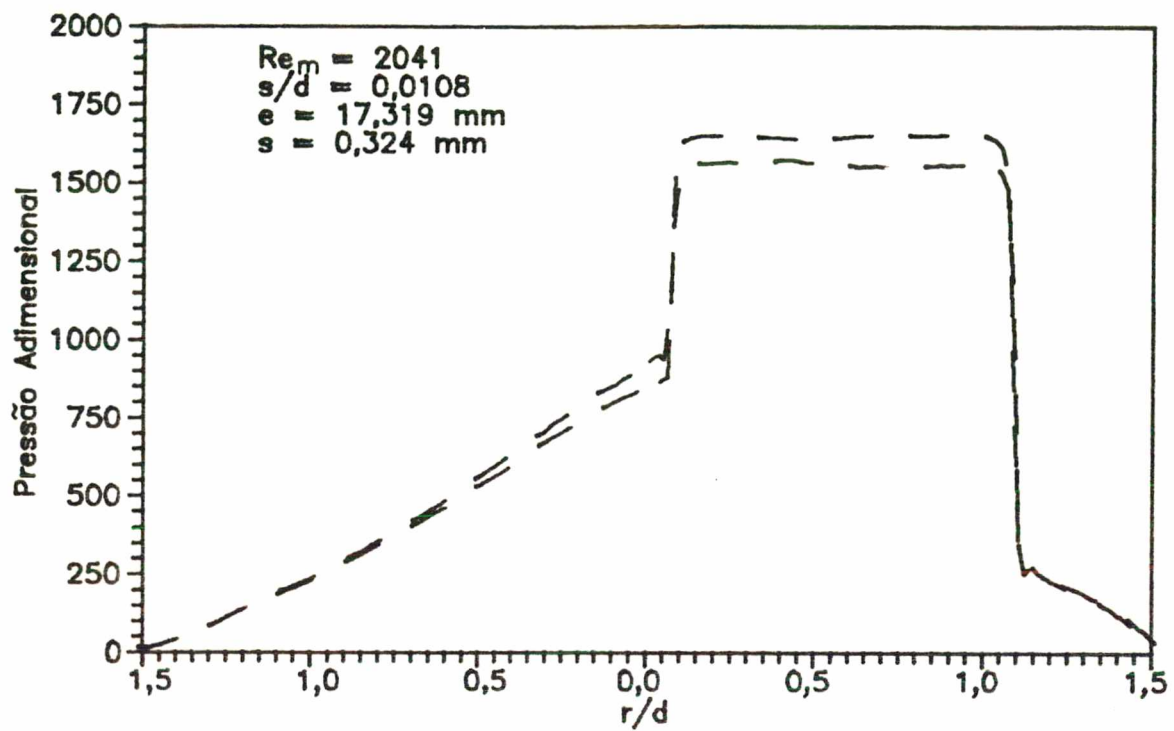


Fig. 3.2 - Resultados experimentais para $Re_m = 2041$, $s/d = 0,0108$ e $e = 17,319$ mm.

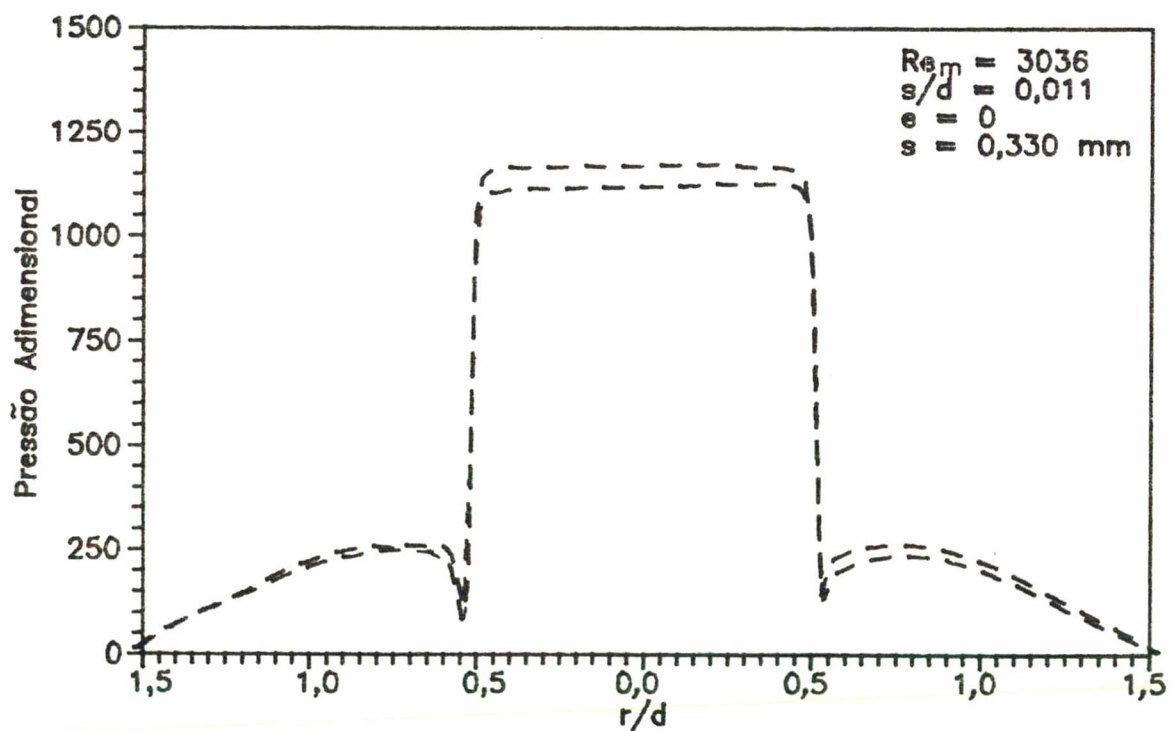


Fig. 3.3 - Resultados experimentais para $Re_m = 3036$, $s/d = 0,011$ e $e = 0$.

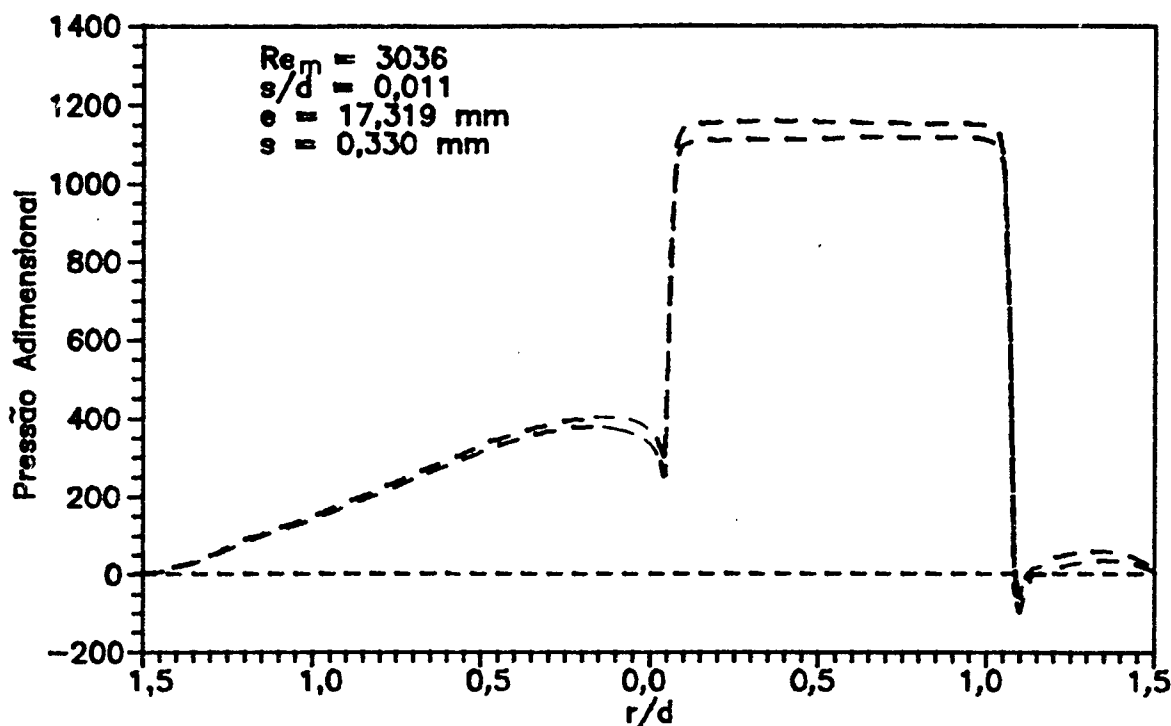


Fig. 3.4. - Resultados experimentais para $Re_m = 3036$, $s/d = 0,011$ e $e = 17,319 \text{ mm}$.

Uma vez ajustada satisfatoriamente a posição da palheta no afastamento desejado, instalam-se os transdutores de deslocamento responsáveis pela medição da correção do afastamento, procedendo sua zeragem através do mostrador analógico.

A partir deste ponto pode-se realizar as tomadas de dados para as posições da palheta e números de Reynolds desejados.

3.2.4. Tomada de dados

Inicialmente, abre-se um arquivo de dados no qual consta, entre outros, os valores de temperatura ambiente, pressão atmosférica, afastamento e excentricidade entre palheta e assento. A seguir, processa-se o programa de aquisição de dados que apresenta, em

primeiro lugar, um círculo simulando a palheta e que serve para marcar as posições inicial e final entre as quais se deseja plotar a distribuição de pressão.

Inicia-se, então, a tomada de dados abrindo-se a válvula reguladora de vazão para o maior valor do número de Reynolds desejado. Anota-se o valor da correção do afastamento e, a seguir, desloca-se o cursor lentamente ao longo do diâmetro da palheta. Finalmente, o programa de aquisição de dados solicita os valores da pressão a montante da placa de orifício e da pressão a montante do assento (válvula). Diminuindo a vazão pode-se obter a distribuição de pressão para outros valores de número de Reynolds.

Após um certo número de vazões terem sido experimentadas, a posição da palheta é alterada para a primeira excentricidade desejada. Repete-se, então, todo o procedimento de ajuste da palheta e a tomada de dados pode ser efetuada nesta outra configuração. Isto pode ser realizado para o número de excentricidades que se desejar.

Para outros afastamentos, o procedimento é idêntico ao exposto anteriormente.

3.3. Redução de dados

Os parâmetros de interesse, resultantes do levantamento experimental, são a pressão adimensional local atuando sobre a superfície da palheta, $p^*(r)$, o número de Reynolds do escoamento no orifício alimentador, Re , o afastamento entre palheta e assento, s , a posição radial da tomada de pressão na palheta, r , e a excentricidade entre palheta e assento, e .

A pressão adimensional é dada por,

$$p^*(r) = \frac{p(r)}{1/2 \rho \bar{w}^2} \quad (3.1)$$

onde $p(r)$ é a pressão manométrica lida diretamente no experimento.

A massa específica do ar é calculada segundo a equação dos gases perfeitos,

$$\rho = \frac{p_{mv} M}{\bar{R} T_{amb}} \quad [\text{kg/m}^3] \quad (3.2)$$

onde, p_{mv} - pressão absoluta a montante do assento [Pa];
 \bar{R} - constante universal dos gases, 8314,3 J/kg-mol.K
 M - massa molecular do ar, 28,98 kg/kg-mol;
 T_{amb} - temperatura ambiente [K].

A velocidade média do fluido no orifício de passagem, \bar{w} , é dada por,

$$\bar{w} = \frac{4 \dot{m}}{\rho \pi d^2} \quad [\text{m/s}] \quad (3.3)$$

onde \dot{m} é o fluxo de massa fornecido pelo medidor de vazão tipo placa de orifício de bordas quadradas instalado na canalização. Segundo [03] é dado pela seguinte equação,

$$\dot{m} = 0,034752 \cdot K \cdot Y \cdot d_0^2 \cdot F_a \cdot \sqrt{h_w \cdot \rho} \quad [\text{kg/s}] \quad (3.4)$$

Para uma determinada relação entre o diâmetro do orifício de passagem e o diâmetro da canalização, o coeficiente de descarga, K , é função somente do número de Reynolds na canalização, enquanto que o fator de expansão, Y , é função do diferencial de pressão através do medidor de vazão e da pressão absoluta a montante. O fator F_a é praticamente igual à unidade e h_w é a pressão diferencial através do

medidor em cm H₂O.

O número de Reynolds, outro parâmetro importante a ser extraído do experimento, é definido como,

$$Re = \frac{\rho \bar{w} d}{\mu} \quad (3.5)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica (absoluta), calculada pela seguinte equação [03],

$$\mu = (K1 + K2.T_{amb} - K3.T_{amb}^2) \times 10^{-6} \text{ [Pa.s]} \quad (3.6)$$

e $K1 = 0,8723809571$

$$K2 = 7,028571429 \times 10^{-2}$$

$$K3 = 3,809523810 \times 10^{-5}$$

$$T_{amb} - [K]$$

O afastamento total entre palheta e assento é dado por,

$$s = s_{aj} + s_{cor} \quad (3.7)$$

onde s_{aj} é o afastamento ajustado e s_{cor} é a correção do afastamento devida à atuação do próprio escoamento. Ambos são lidos diretamente no experimento.

A excentricidade, e , entre a palheta e o orifício de passagem do assento e a posição radial da tomada de pressão sobre a palheta, r , também são obtidos diretamente do experimento.

O apêndice A apresenta a análise da incerteza associada às medições experimentais.

4. ESCOAMENTO PARA PEQUENOS AFASTAMENTOS ENTRE PALHETA E ASSENTO

4.1. Introdução

No presente capítulo é apresentada a solução numérica do escoamento tridimensional de ar em um difusor radial excêntrico considerando-se pequenos afastamentos entre a palheta e o assento.

Inicialmente é apresentada a formulação do problema, assim como alguns comentários sobre a solução numérica. Posteriormente, a solução numérica é validada através da comparação com resultados obtidos para diversas soluções analíticas de problemas mais simplificados, bem como com os resultados experimentais obtidos para o próprio difusor.

4.2. Formulação do Problema

Os estudos sobre o escoamento em difusores radiais, realizados até o momento, se referem a difusores radiais centrados, ou seja, a excentricidade entre a palheta e o assento é considerada nula. Deschamps [01] faz uma análise deste tipo de difusor com o objetivo de estudar alguns tipos de válvulas de compressores.

No entanto, este modelo não é adequado para o estudo de muitos outros tipos de válvulas. A figura 4.1 apresenta um esquema de vários tipos de palhetas de válvulas utilizadas em compressores de refrigeração. Como pode ser observado, circunferencialmente as palhetas reais apresentam recobrimentos distintos que promovem distribuição não uniforme do fluxo de massa deixando o orifício alimentador. Portanto, o estudo deste tipo de válvula requer um modelo que leve em consideração a excentricidade existente entre a palheta e

o orifício alimentador. O modelo mais simples que pode ser utilizado é aquele em que tanto a palheta quanto o orifício são limitados por circunferências excêntricas.

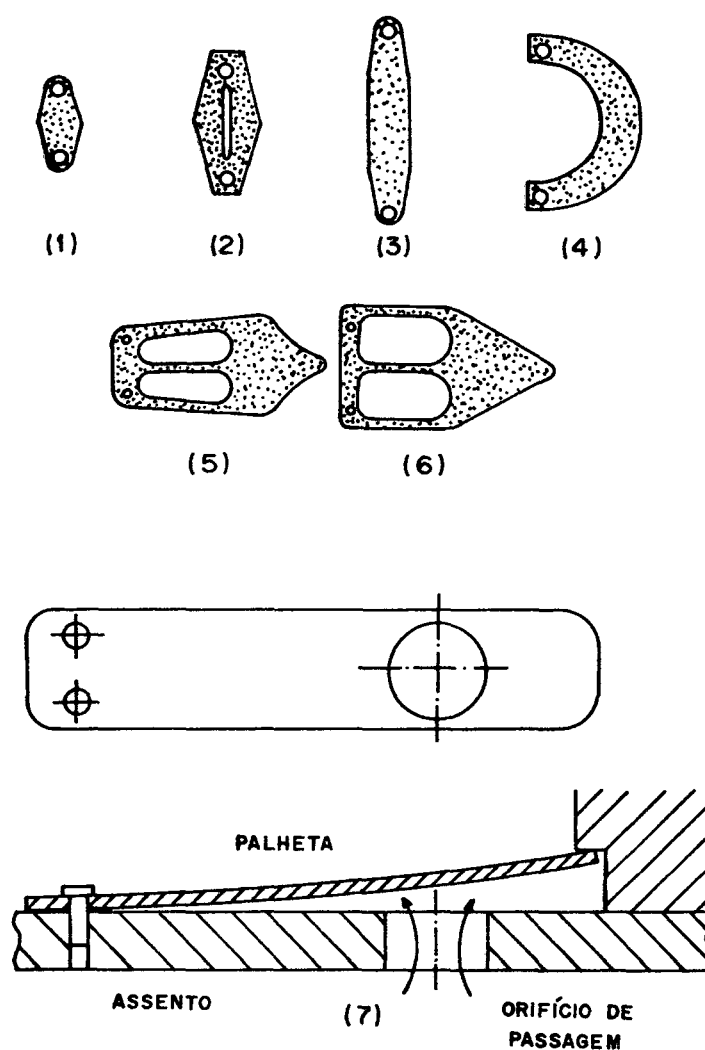


Fig. 4.1 - Palhetas de válvula de descarga (1-4) e sucção (5,6) e esquema de um sistema de válvula de compressores de refrigeração (7).

A geometria do difusor estudado, que se constitui no modelo de laboratório de um sistema de válvula de compressores de refrigeração, é apresentada esquematicamente na figura 4.2.

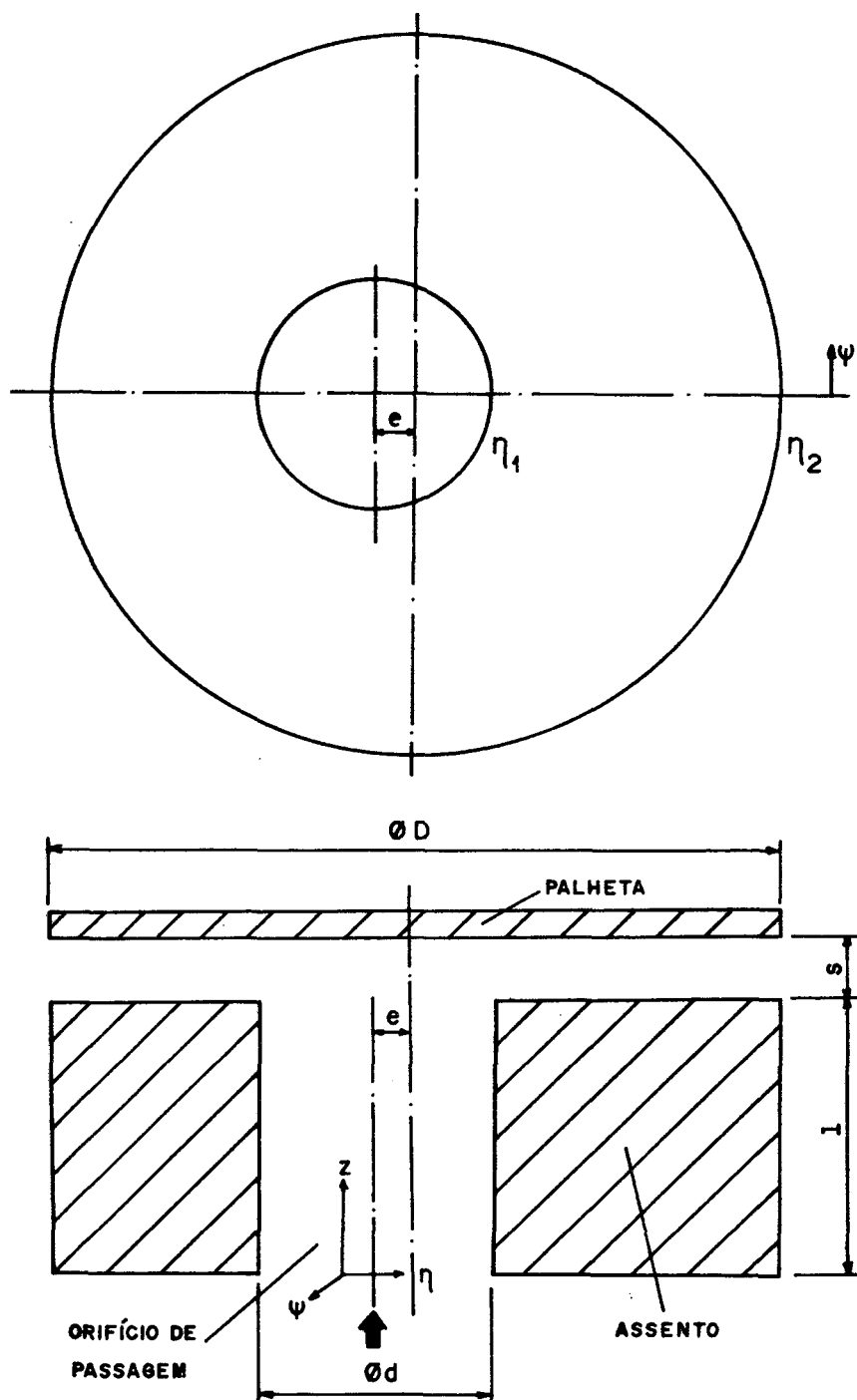


Fig. 4.2 - Geometria do escoamento.

As dimensões fixas do difusor são idênticas àquelas do experimento, ou seja, $1/d = 0,933$ e $D/d = 3$, sendo $d = 30$ mm.

O ar escoia através do orifício de passagem na direção z e, ao incidir sobre a palheta, é forçado a passar entre o canal formado por ela e o assento, escoando nas direções η e ψ .

O sistema de coordenadas natural que se adapta perfeitamente a esta geometria é conhecido como bipolar ou bicilíndrico (ψ, η, z) . As características principais deste sistema de coordenadas são apresentadas no apêndice B.

As equações governantes do problema hidrodinâmico são as equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade. Usando as hipóteses de:

- 1) fluido Newtoniano;
- 2) propriedades físicas constantes;
- 3) escoamento incompressível e laminar e
- 4) escoamento em regime permanente, encontra-se, para o sistema de coordenadas bicilíndricas:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho h u u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho h v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h^2 w u) \right] &= -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \\
 &+ \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\
 &+ \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial \psi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{u}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2} - \frac{u}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) - \\
 &- \frac{\rho}{h^2} \left(u v \frac{\partial h}{\partial \eta} - v^2 \frac{\partial h}{\partial \psi} \right)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho h u v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho h v v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h^2 w v) \right] &= -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \\
&+ \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \\
&+ \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial \psi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{v}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - \frac{v}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2} \right) - \\
&- \frac{\rho}{h^2} \left(u v \frac{\partial h}{\partial \psi} - u^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho h u w) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho h v w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h^2 w w) \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \\
&+ \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho h u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho h v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h^2 w) \right] = 0 \tag{4.4}$$

onde u , v e w são as velocidades nas direções ψ , η e z , respectivamente, p a pressão, ρ a massa específica do fluido, μ sua viscosidade dinâmica e h corresponde à métrica do sistema de coordenadas bicilíndricas, deduzida no Apêndice B e dada por,

$$h = a/(\cosh \eta - \cos \psi) \tag{4.5}$$

A formulação do problema é completada através da especificação das condições de contorno a serem satisfeitas pelas velocidades u , v e w . A Fig. 4.3 apresenta o domínio de cálculo usado para o escoamento na presente análise.

e_0 - EXCENTRICIDADE ENTRE O EIXO DE COORDENADAS Z E A
LINHA DE CENTRO DA PALHETA
 $0 \leq \psi \leq 2\pi$

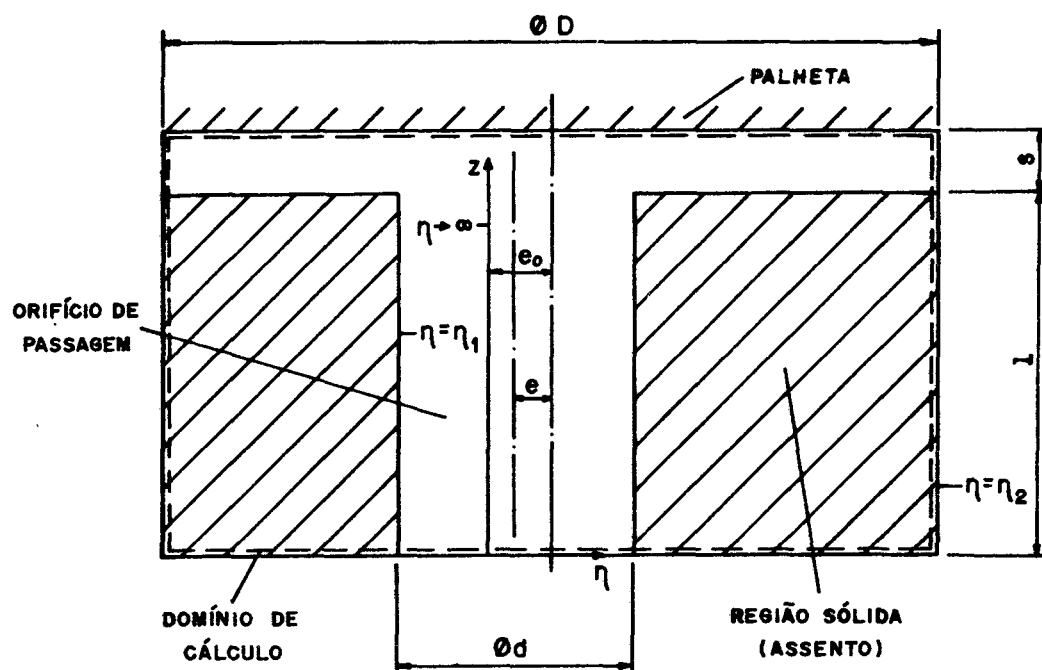


Fig. 4.3 - Domínio de cálculo do escoamento.

Na parede da palheta, as condições de contorno utilizadas são as de não-deslizamento do fluido e a de impenetrabilidade, ou seja, $u = v = w = 0$. Na entrada do orifício de passagem usou-se um perfil plano para a velocidade w e $u = v = 0$. Deschamps [01] testou, para o caso de palheta e assento concêntricos ($e=0$), um perfil parabólico para w , não encontrando alterações significativas no perfil de pressão sobre a palheta. Isto ocorre devido à grande deformação do perfil de velocidade na saída do orifício de passagem, causada pela aceleração do fluido ao entrar no canal formado pelo assento e palheta, tornando irrelevante a forma do perfil de velocidade na entrada do orifício de passagem. Na saída do difusor usou-se a

condição de escoamento plenamente desenvolvido, isto é, $w=0$ e $\frac{\partial}{\partial \eta}(\rho hu) = \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho hv) = 0$.

Resumindo, tem-se que,

$$u=v=w=0 \text{ para } z=1+s, \eta \geq \eta_2, 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (4.6a)$$

$$u=v=w=0 \text{ para } 0 \leq z \leq 1, \eta = \eta_2, 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (4.6b)$$

$$u=v=0 \text{ e } w=\text{cte para } z=0, \eta \geq \eta_1, 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (4.6c)$$

$$u=v=w=0 \text{ para } z=0, \eta_2 \leq \eta \leq \eta_1, 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (4.6d)$$

$$w=0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho hu) = \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho hv) = 0 \text{ para } 1 \leq z \leq 1+s, \eta = \eta_2 \text{ e } 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (4.6e)$$

Desta forma, as equações diferenciais 4.1 a 4.4 somadas às condições de contorno 4.6 completam a formulação do problema.

A geometria do problema é caracterizada pelas grandezas D , d , s e e .

4.3. Metodologia de solução

As equações diferenciais 4.1 a 4.4 foram resolvidas numericamente pelo método dos volumes finitos que consiste, basicamente, em dividir o domínio de cálculo em pequenos volumes de controle não sobrepostos. As equações diferenciais são, então, integradas em cada um destes volumes de controle, resultando um conjunto de equações algébricas que, ao serem resolvidas, fornecem os campos de velocidade e pressão. Maiores informações sobre este método podem ser obtidas em [02].

Na presente análise as equações diferenciais 4.1 a 4.4 foram integradas em um volume de controle genérico cujo esquema é apresentado na Fig. 4.4.

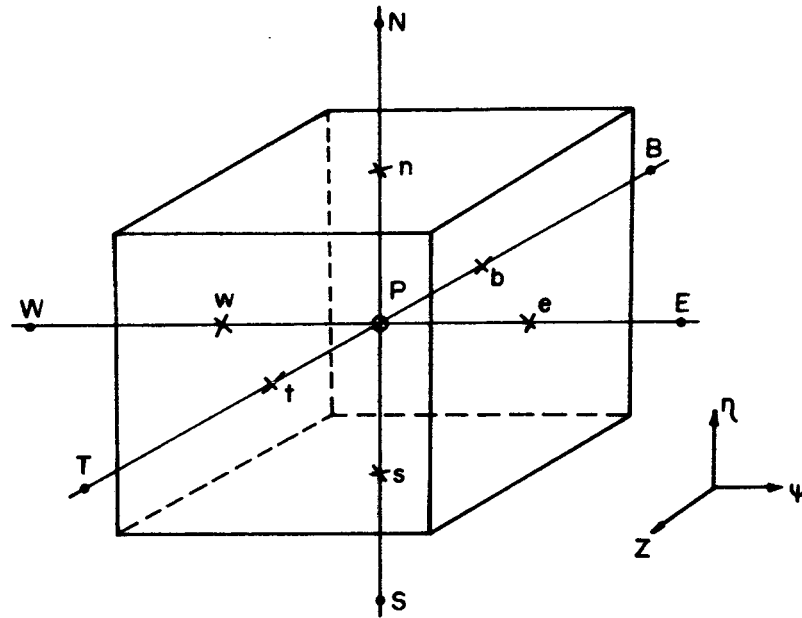


Fig. 4.4 - Volume de controle principal para a integração das equações diferenciais.

Deve-se salientar que a integração das equações diferenciais em coordenadas bicilíndricas apresenta algumas peculiaridades importantes do ponto de vista numérico. Para exemplificar, seja a equação da quantidade de movimento linear na direção ψ . A integração do termo de pressão é realizada da seguinte forma,

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \psi} h^2 d\psi d\eta dz = \frac{(p_w - p_e)}{h_{\psi}^{-} \Delta \psi_u} \Delta V^u \quad (4.7)$$

onde $\Delta V^u = \bar{h}^2 \Delta \eta_u \Delta \psi_u \Delta z_u$ é o volume do volume de controle para a velocidade u , cujo esquema é apresentado na Fig. 4.5, e \bar{h} é o valor de

h no ponto médio $(\bar{\psi}, \bar{\eta})$.

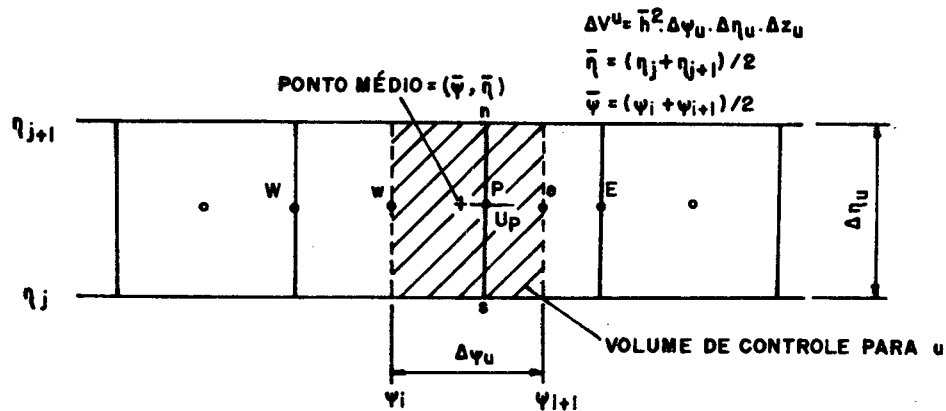


Fig. 4.5 - Volume de controle para a velocidade u .

A integração dos termos fonte também requer cuidado. A integração do termo $\rho v^2 \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right) / h^2$, por exemplo, resulta em,

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z \frac{\rho v^2}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right) h^2 d\psi d\eta dz = \frac{\rho_p v_p^2}{h_p^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p \Delta V^u \quad (4.8)$$

onde p representa o ponto principal do volume de controle da velocidade u e $\left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p$ é calculado analiticamente a partir da equação 4.5.

A integração dos termos convectivos e difusivos é realizada em conjunto, por exemplo,

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho h u u - \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \right] h^2 d\psi d\eta dz = (J_e - J_w) \Delta \eta_u \Delta z_u \quad (4.9)$$

onde $J_e = \left(\rho h u u - \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)_e$ e $J_w = \left(\rho h u u - \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)_w$ são avaliados segundo a lei de potência [02].

Assim, a equação algébrica obtida da integração da equação 4.1 é dada por,

$$a_p u_p = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + a_T u_T + a_B u_B + b^u \quad (4.10)$$

onde
$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B - S_p^u \Delta V^u \quad (4.11)$$

$$b^u = S_c^u \Delta V^u \quad (4.12)$$

$$S_p^u = - \left[\frac{\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2} \right)_p + \frac{\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right)_p + \frac{\rho_p v_p}{h_p^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_p \right] \quad (4.13)$$

$$S_c^u = \frac{(p_w - p_e)}{h_\psi^- \Delta \psi_u} + \frac{2\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial \psi} \right)_p - \frac{2\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_p + \frac{\rho_p v_p^2}{h_p^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p \quad (4.14)$$

Detalhes sobre a discretização da equação anterior e a discretização das demais equações são apresentados no apêndice C.

Para acelerar a convergência na obtenção da solução numérica, o algoritmo de correção em bloco [04] foi implementado no programa computacional.

A região sólida do assento, pertencente ao domínio de cálculo (Fig.4.3), foi tratada como se naquela região a viscosidade do fluido fosse infinita [05]. Tal técnica dispensa um tratamento diferenciado para a região sólida.

Para o caso do difusor radial excêntrico, o modelo numérico deve conter a informação de que na saída do difusor, ou seja, para $l \leq z \leq l+s$, $\eta = \eta_2$ e $0 \leq \psi \leq 2\pi$, a pressão é uniforme e nula. No presente trabalho, os volumes de controle da saída do difusor foram feitos suficientemente pequenos e impôs-se que o coeficiente a_p da equação C.34 fosse muito grande. Assim, consegue-se fazer com que a pressão nestes volumes de controle do contorno seja nula. Quanto menor for a dimensão destes volumes na direção η , maior será a aproximação de pressão nula na saída do difusor. Deve-se ressaltar que esta informação é essencial para que a solução correta do escoamento possa ser obtida.

4.4. Malha

A escolha da malha a ser utilizada na integração das equações diferenciais deve levar em consideração os seguintes aspectos:

- 1) existência de altos gradientes de velocidade no escoamento;
- 2) presença de difusão falsa no método numérico e
- 3) tempo de CPU.

Para escoamentos com elevados números de Reynolds, a região localizada na saída do orifício de passagem e entrada do difusor é caracterizada por grandes variações de velocidade assim como de pressão. Para que o modelo numérico possa captar essas variações é necessário que a malha seja suficientemente refinada nessa região.

A difusão falsa é um inconveniente de origem essencialmente numérica. Quando se utilizam interpolações unidimensionais nos termos convectivos e difusivos, que é o caso do presente trabalho, contribuições fisicamente inexistentes podem estar sendo incluídas nas

grandezas de interesse se o vetor velocidade estiver desalinhado com uma das linhas de coordenadas.

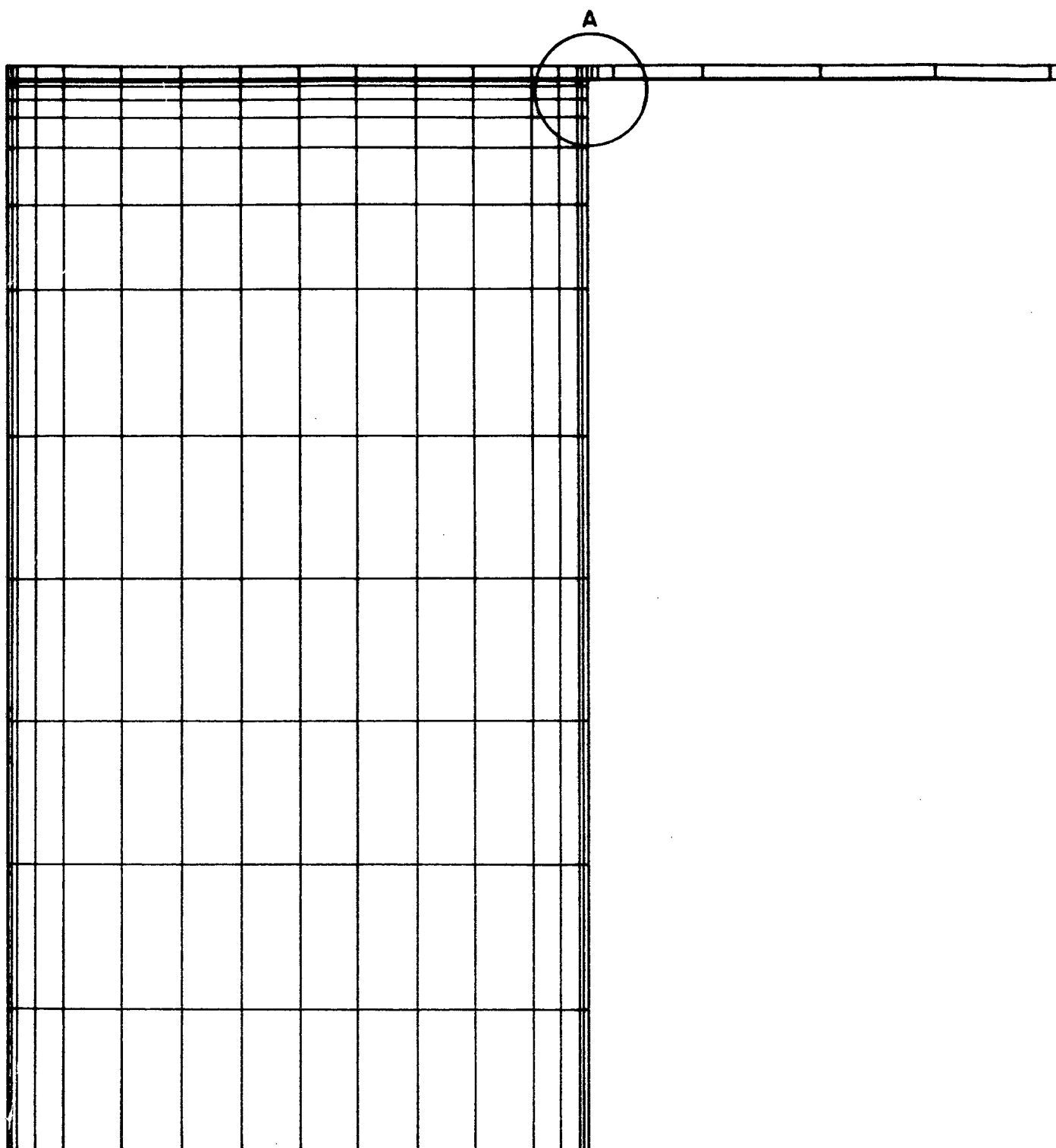
A mesma região, citada anteriormente, apresenta os vetores velocidade bastante desalinhados em relação à malha, devido à deflexão do escoamento causada pela presença da palheta. Portanto, é nesta região que o fenômeno da difusão falsa tem sua importância e pode apresentar valores consideráveis. Deschamps [01] apresenta um estudo da difusão falsa para difusores radiais centrados considerando-se escoamento bidimensional.

Para minimizar os efeitos da difusão falsa, algumas técnicas podem ser utilizadas, tais como:

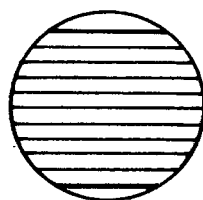
- 1) refino de malha;
- 2) emprego de funções de interpolação multidimensionais e um maior número de pontos na discretização das equações e
- 3) alinhamento da malha com o vetor velocidade.

No presente trabalho, optou-se por um refino da malha nas regiões críticas do escoamento. A Fig. 4.6 apresenta a primeira malha utilizada neste trabalho. A partir da análise dos resultados experimentais, pode-se obter, com maior eficiência, malhas mais refinadas nas regiões de maiores gradientes. Neste processo, o tempo computacional e o número de pontos nodais utilizados são fatores limitantes. Por isto, a escolha da malha a ser utilizada na obtenção das soluções numéricas representa um compromisso entre as melhorias oferecidas por uma malha com um maior número de pontos nodais e o tempo necessário para se obter uma solução convergida.

A Fig. 4.7 mostra a malha utilizada no presente trabalho, constando de 30240 pontos nodais.

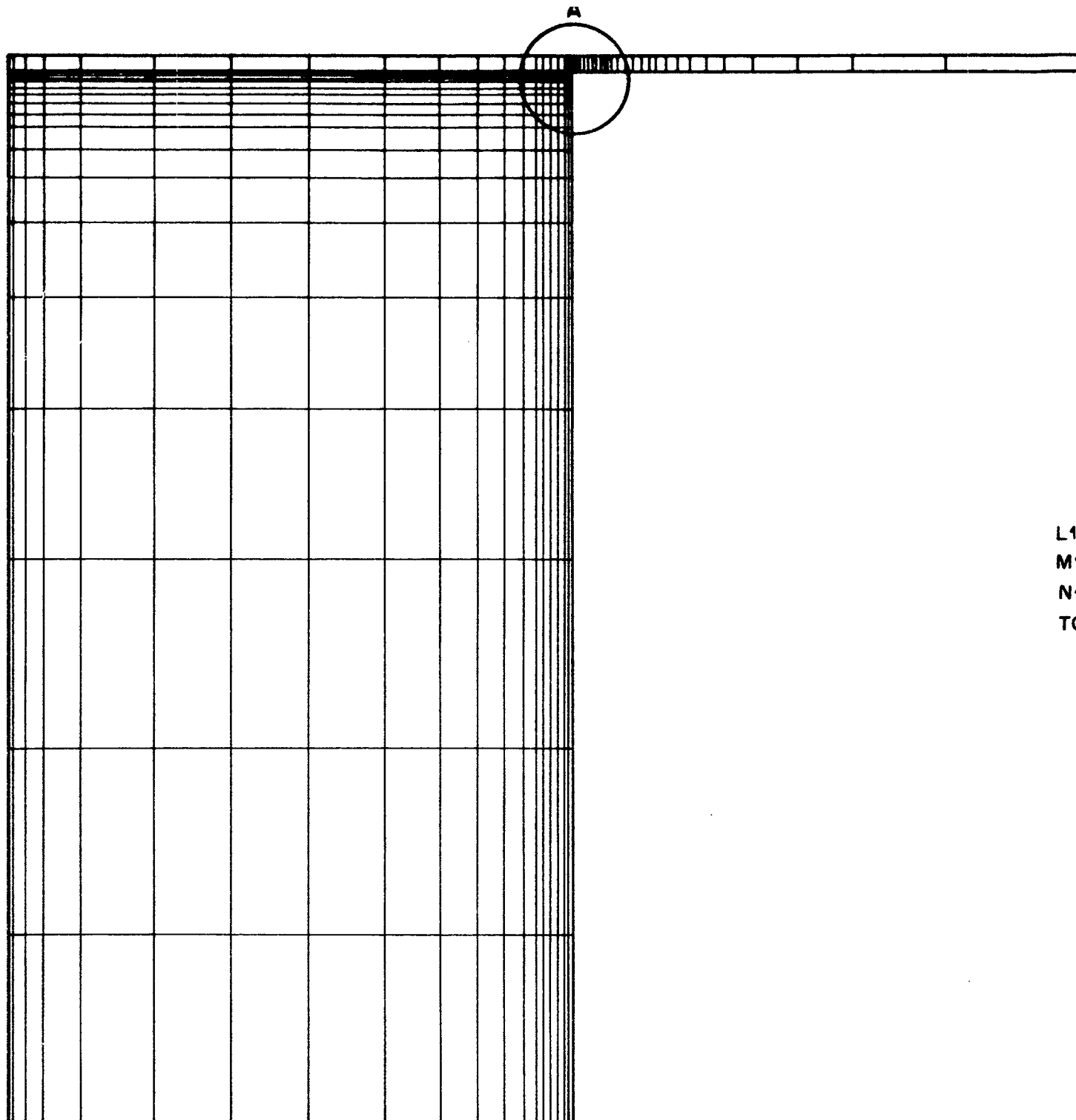


DETALHE A



10 pontos

Fig. 4.6 - Primeira malha utilizada.



L1
M1
N1
TC

DETALHE A

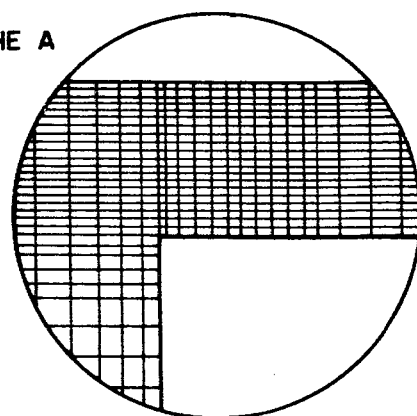


Fig. 4.7 - Malha utilizada na obtenção das soluções numéricas

4.5. Validação da solução numérica

4.5.1. Comparação com soluções analíticas

Com o objetivo de validar a solução numérica, utilizando coordenadas bicilíndricas num esquema tridimensional, investigou-se três tipos diferentes de escoamentos mais simples, a saber: escoamento axial através de dois tubos concêntricos, escoamento tangencial entre dois cilindros concêntricos com o cilindro interno girando e o escoamento puramente viscoso através de um difusor radial centrado. Desta forma, procurou-se validar o modelo numérico nas três direções, já que nas situações descritas acima os escoamentos principais ocorrem nas direções z , ψ e η , respectivamente.

a) Cilindro em rotação

A Fig. 4.8 apresenta um esquema da geometria do escoamento incompressível, em regime permanente, no interior de dois cilindros concêntricos em movimento relativo.

Deve-se salientar que, quando a excentricidade " e_0 " (Fig. 4.2) tende a zero, o sistema bicilíndrico de coordenadas tende para o sistema cilíndrico e, portanto, as equações 4.1 a 4.4 tornam-se as equações de Navier-Stokes e conservação da massa em coordenadas cilíndricas. O apêndice D demonstra esta transformação com detalhes.

Supondo cilindros suficientemente longos ($L \rightarrow \infty$) e escoamento completamente desenvolvido, a solução das equações em coordenadas cilíndricas fornece,

$$u(r) = U_0 \frac{R_1}{r} \left(\frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) \quad (4.15)$$

$$p(r) = \rho \left(\frac{U_0 R_1}{R_1^2 - R_2^2} \right)^2 \left[\left(\frac{r^2}{2} - 2 R_2^2 \ln r - \frac{R_2^4}{2r^2} \right) - \left(\frac{R_1^2}{2} - 2 R_2^2 \ln R_1 - \frac{R_2^4}{2R_1^2} \right) \right] \quad (4.16)$$

onde U_0 é a velocidade tangencial em $r = R_1$ e $p(R_1) = 0$.

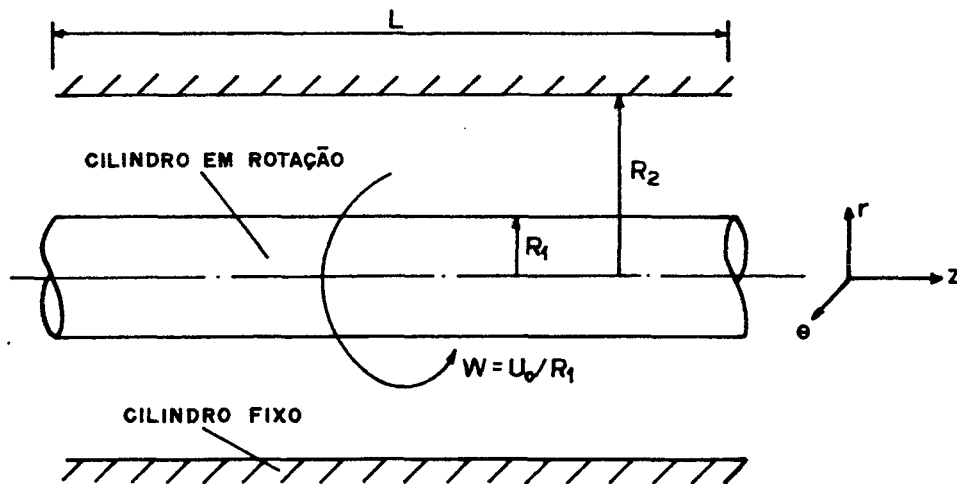


Fig. 4.8 - Geometria do escoamento para o cilindro em rotação.

A Fig. 4.9 apresenta a solução numérica para o perfil radial de pressão quando as equações diferenciais em coordenadas cilíndricas e bicilíndricas são usadas no modelo numérico. Observa-se que ambos os resultados numéricos são idênticos.

As Figs. 4.10 e 4.11 mostram a comparação entre as soluções analítica e numérica para os perfis de velocidade e pressão, respectivamente. Nota-se a boa concordância entre os resultados.

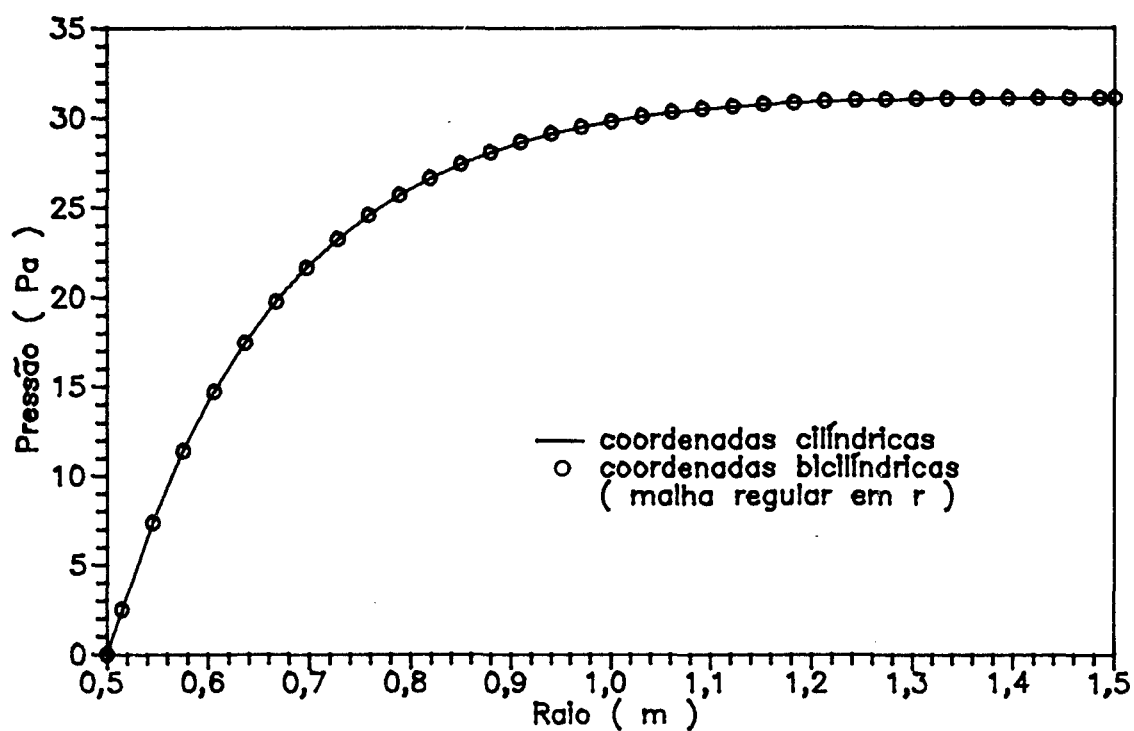


Fig. 4.9 - Solução numérica para o perfil de pressão para o problema do cilindro em rotação - computação em coordenadas cilíndricas e bicilíndricas.

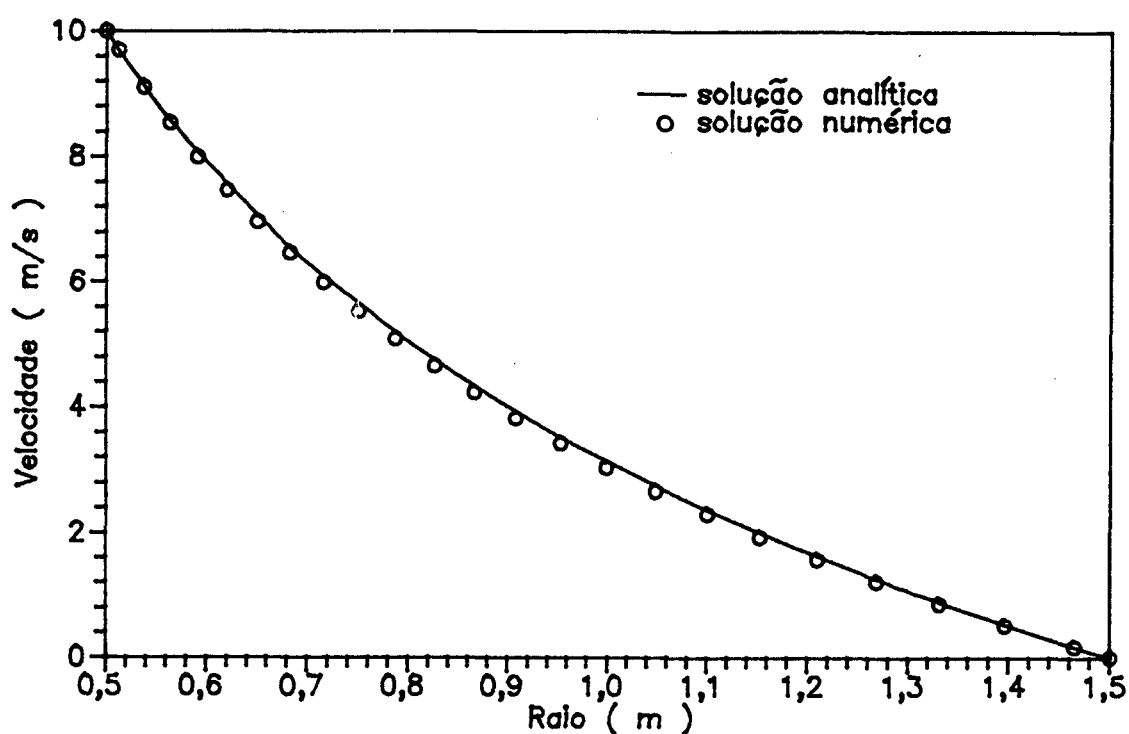


Fig. 4.10 - Perfil de velocidade do escoamento para o problema do cilindro em rotação.

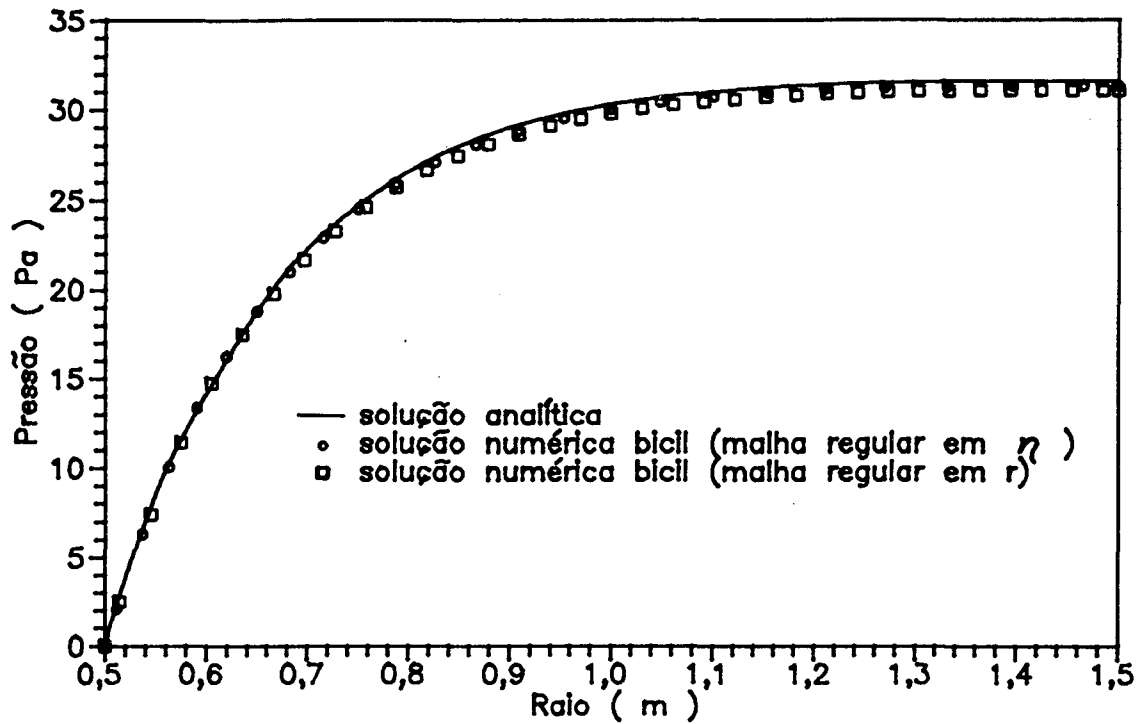


Fig. 4.11 - Perfil radial de pressão para o problema do cilindro em rotação.

b) Tubos concêntricos

A Fig. 4.12 mostra um esquema da geometria do escoamento axial entre tubos concêntricos.

Considerando escoamento incompressível, plenamente desenvolvido e em regime permanente, obtém-se a seguinte solução para a distribuição axial de pressão,

$$\frac{dp}{dz} = \frac{2 \mu Q}{\pi K'} \quad (4.17)$$

onde

$$K' = \left\{ \left[\frac{(R_2^4 - R_1^4)}{4} + \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{2 \ln(R_2/R_1)} \left[R_2^2 (\ln R_2 - 1/2) - R_1^2 (\ln R_1 - 1/2) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(R_1^2 - R_2^2) \ln R_1}{2 \ln(R_2/R_1)} (R_1^2 - R_2^2) - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{2} + \frac{R_1^4}{2} \right\} \quad (4.18)$$

e

$$Q = \int_A w \, dA \quad (4.19)$$

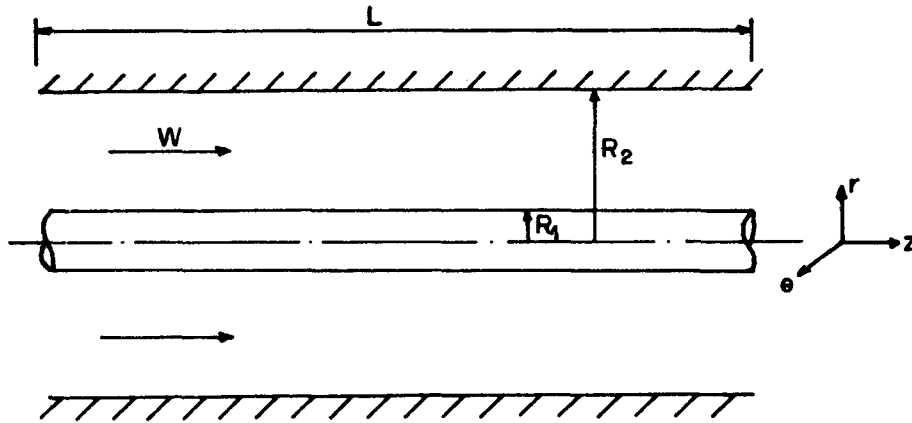


Fig. 4.12 - Escoamento axial entre tubos concêntricos.

A comparação entre os resultados numérico e analítico obtidos para o perfil axial de pressão é mostrado na Fig. 4.13, onde observa-se a excelente concordância destes resultados.

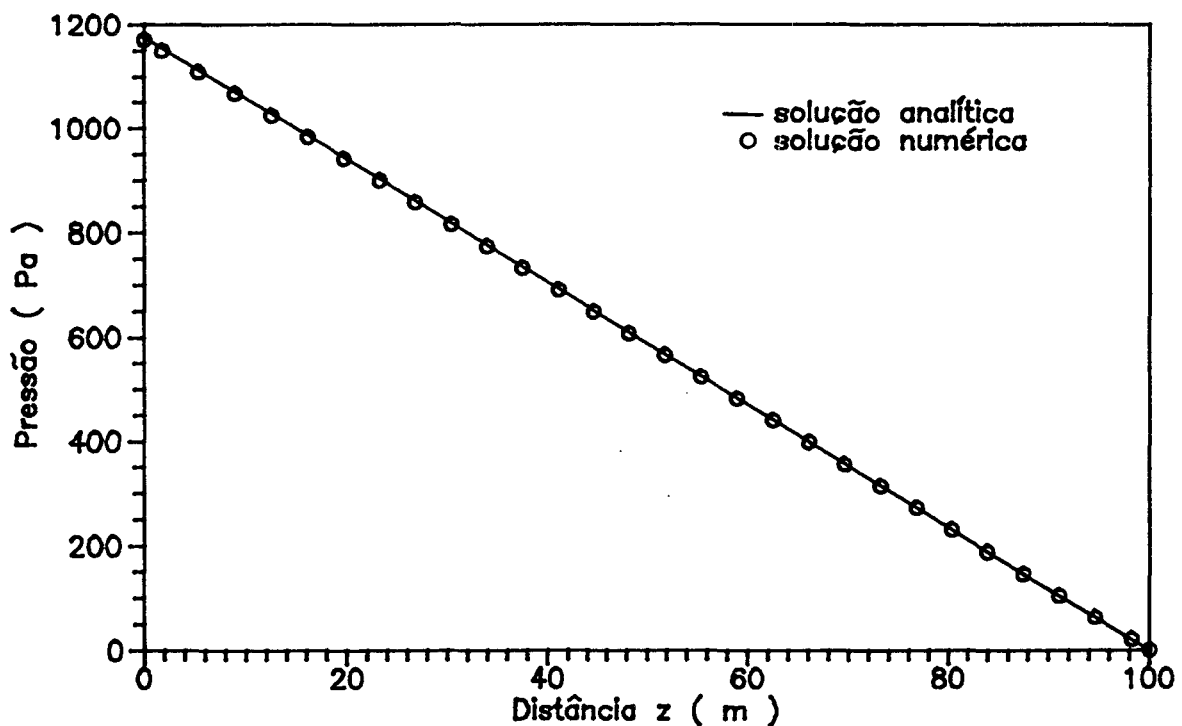


Fig. 4.13 - Perfil axial de pressão para o escoamento entre tubos concêntricos.

c) Difusor radial

Para pequenos afastamentos (s) e baixos números de Reynolds, onde os efeitos viscosos predominam sobre os efeitos de inércia, é possível obter uma solução analítica para a distribuição de pressão na palheta. A Fig. 4.14 apresenta a geometria do escoamento para o difusor radial centrado.

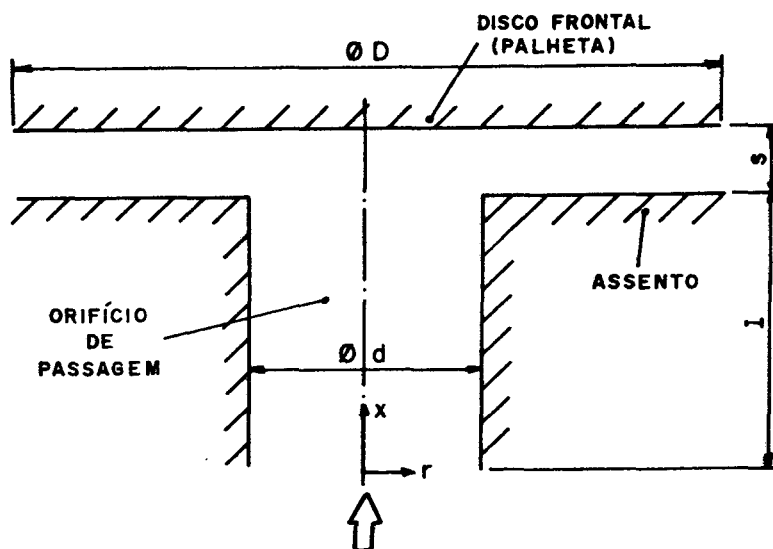


Fig. 4.14 - Geometria do escoamento para o difusor radial centrado.

Desprezando os termos de inércia e assumindo escoamento incompressível, plenamente desenvolvido e em regime permanente, a equação do movimento na direção r pode ser integrada para fornecer o seguinte perfil de pressão na região do difusor,

$$p^*(R) = \left[3/(s/d)^3 \right] / Re \cdot \ln \left[0,5(D/d)/R \right] \quad (4.20)$$

onde

- $p^*(R)$ - pressão adimensional na posição R ($p/(1/2\rho\bar{w}^2)$);
- s/d - afastamento adimensional entre palheta e assento;
- Re - número de Reynolds no orifício de passagem ($\rho\bar{w}d/\mu$);
- D/d - relação entre o diâmetro da palheta, D , e o diâmetro do orifício de passagem, d ;
- R - posição radial adimensional (r/d);
- \bar{w} - velocidade média do escoamento no orifício de passagem.

A Fig. 4.15 apresenta, para $Re = 70$ e $s/d = 0,01$, a comparação entre a distribuição radial de pressão sobre a palheta obtida numérica e experimentalmente. Observa-se que existe uma boa concordância entre esses resultados.

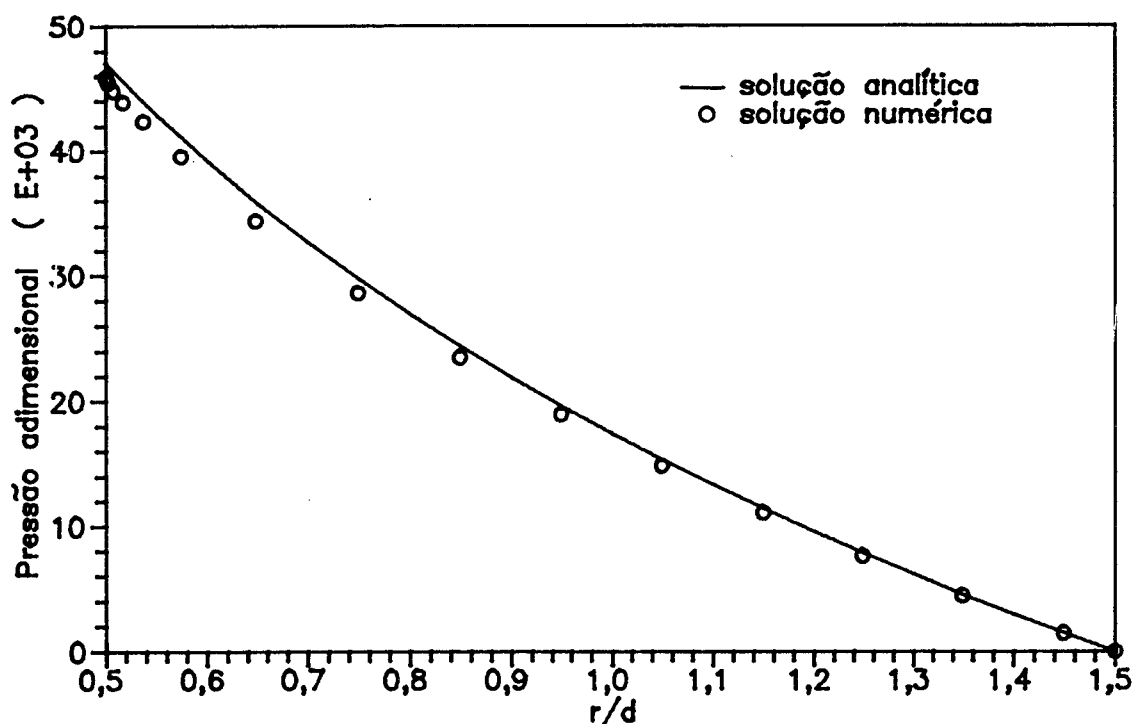


Fig. 4.15 - Comparação entre as soluções analítica e numérica do perfil radial de pressão sobre a palheta, na região do difusor, para $Re = 70$ e $s/d = 0,01$.

4.5.2. Comparação com os resultados experimentais

A validação completa do modelo numérico é obtida a partir da comparação com resultados experimentais para o escoamento no próprio difusor excêntrico.

A seguir apresentam-se comparações entre os resultados experimentais e numéricos para diversos escoamentos e geometrias do difusor. Utilizou-se afastamentos adimensionais, s/d , próximos a 0,010, 0,020 e 0,025. Foram realizados experimentos para o caso de palheta concêntrica ao orifício de passagem, assim como para excentricidades na ordem de 5, 10, 15 e 17 mm. Os números de Reynolds experimentados situaram-se na faixa de 1000 a 3000.

É importante salientar que foram efetuadas várias tomadas de dados para cada caso descrito, observando-se uma boa repetibilidade dos resultados.

Os resultados numéricos foram obtidos com o uso de uma malha de $14 \times 54 \times 40$ pontos nodais nas direções ψ , η e z , respectivamente. Para verificar a influência do número de pontos na direção ψ , alguns resultados também foram gerados com uma malha de $22 \times 54 \times 40$, não se observando diferenças significativas. As Figs. 4.16 e 4.17 apresentam um esquema das duas malhas acima citadas. Maiores refinamentos na malha de $14 \times 54 \times 40$ comprometem violentamente o tempo de CPU necessário à obtenção da convergência da solução.

As Figs. 4.18 a 4.24 apresentam comparações entre os resultados numérico e experimental para afastamentos da ordem de $s/d \approx 0,010$, várias excentricidades e números de Reynolds.

As comparações numérico/experimental para afastamentos próximos a $s/d \approx 0,020$ são mostrados nas Figs. 4.25 a 4.33, enquanto que para $s/d \approx 0,025$ são apresentados nas Figs. 4.34 a 4.38.

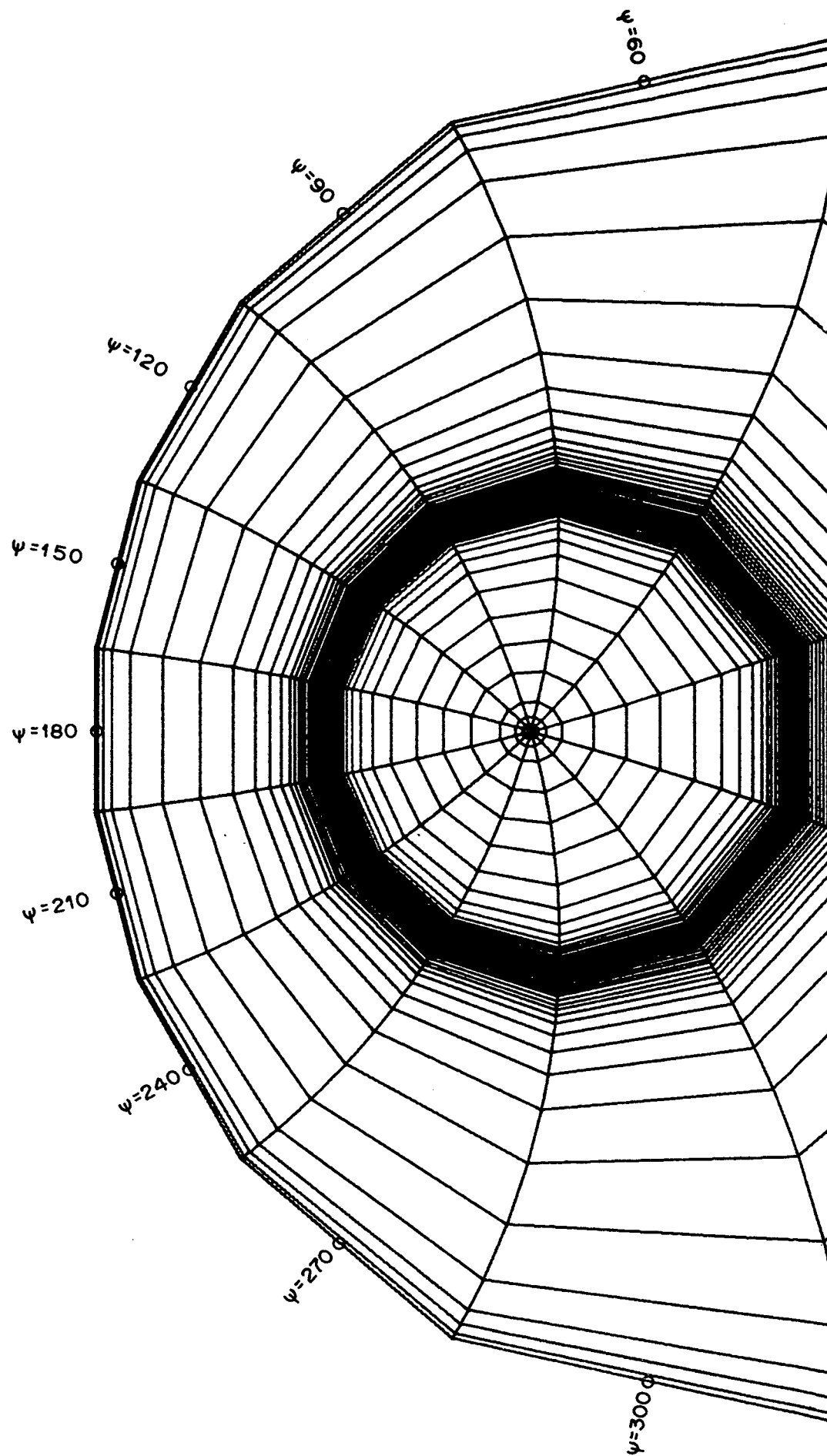


Fig. 4.16 - Malha 14 x 54

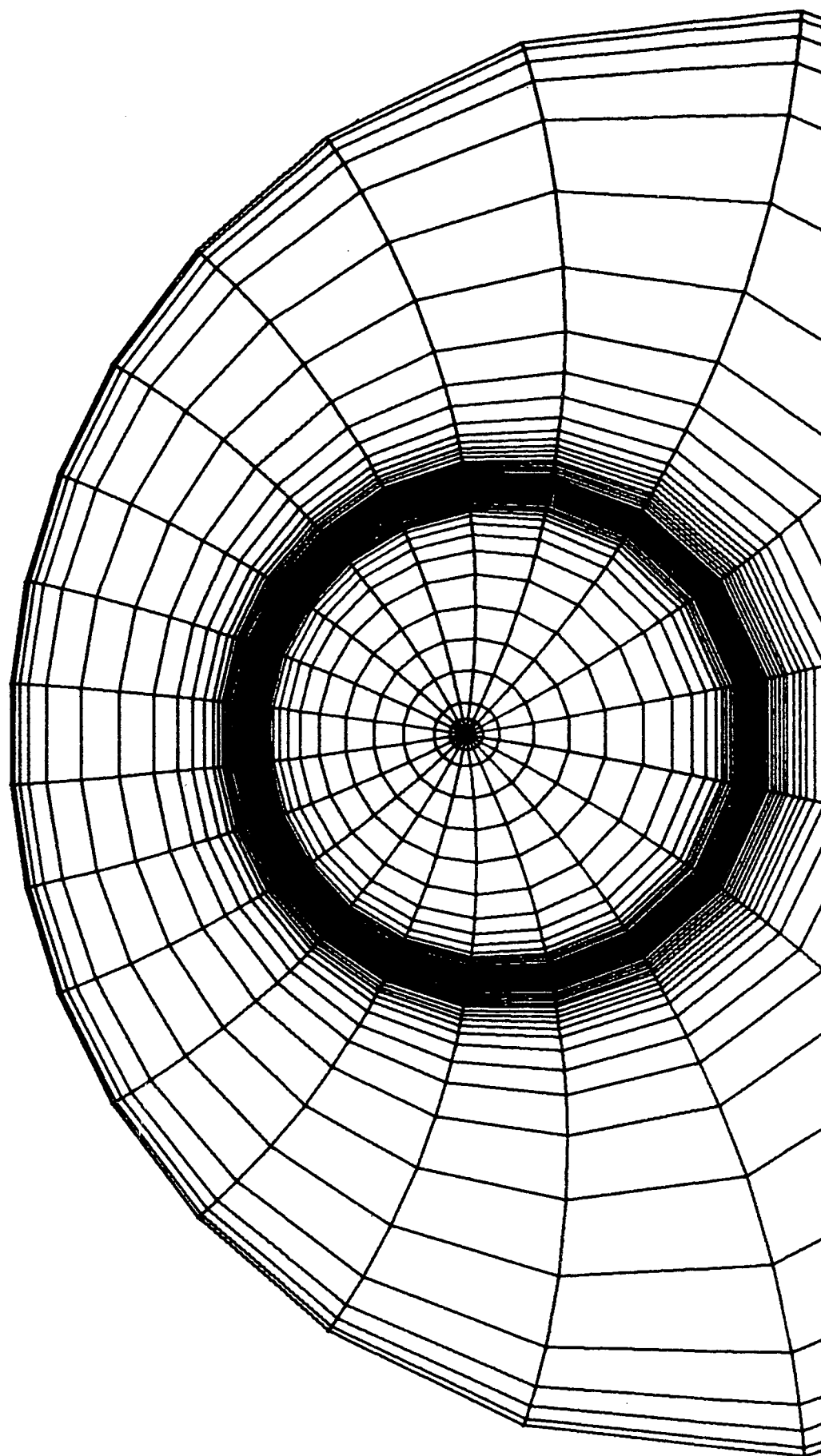


Fig. 4.17 - Malha 22 x 54 x 40.

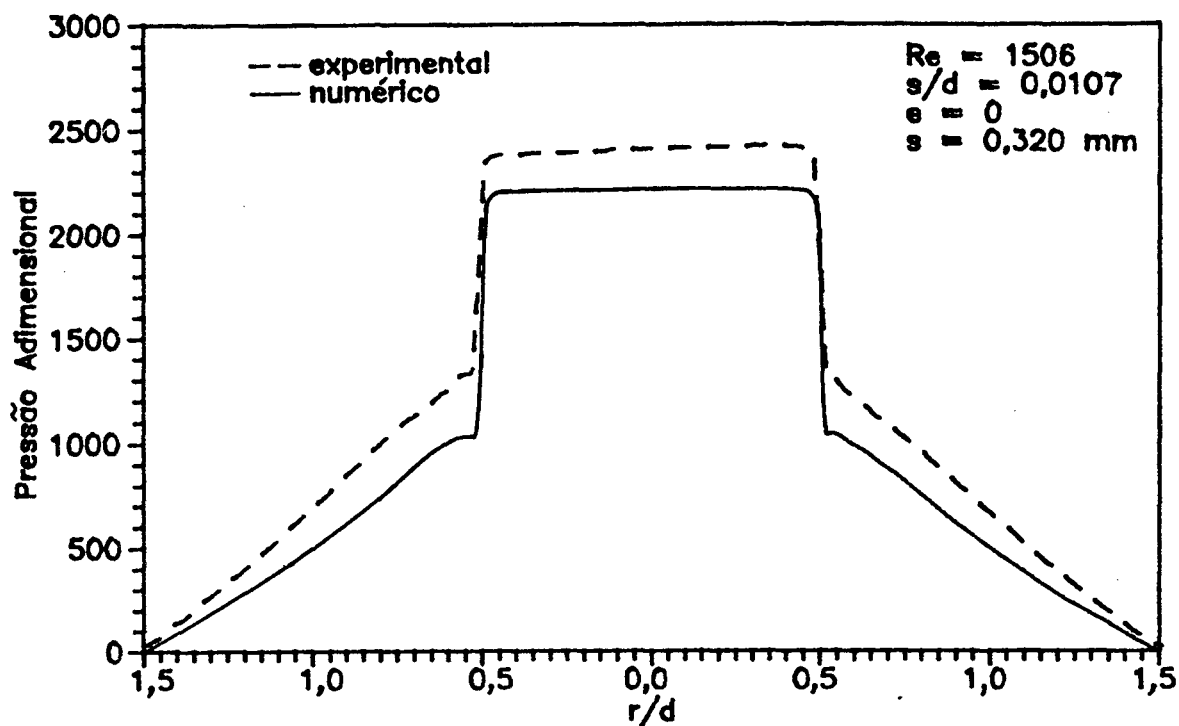


Fig. 4.18 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1506$, $s/d=0,0107$ e $e=0$.

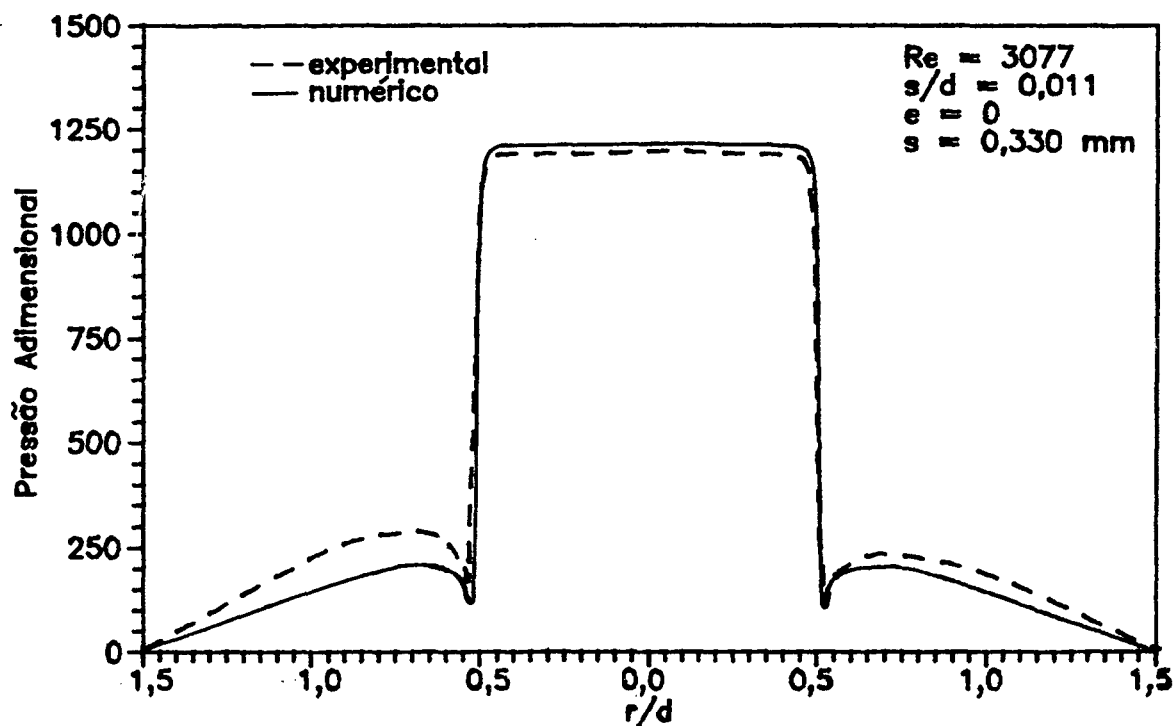


Fig. 4.19 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3077$, $s/d=0,011$ e $e=0$.

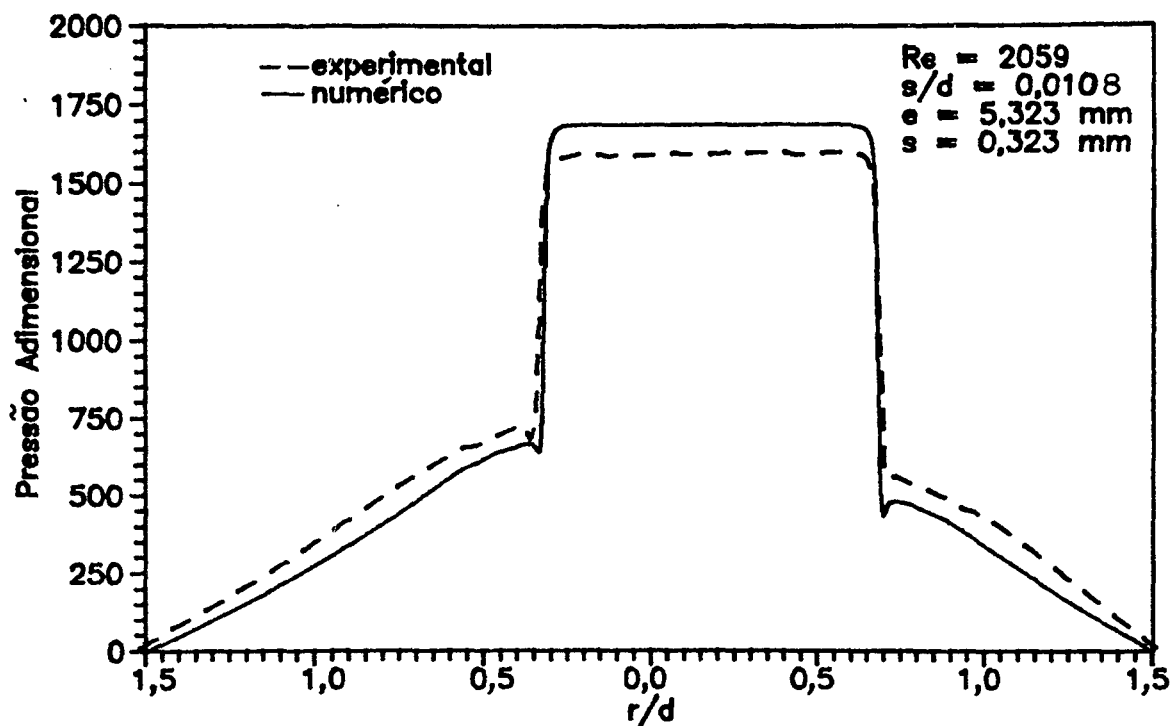


Fig. 4.20 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2059$, $s/d=0,0108$ e $e=5,323 \text{ mm}$.

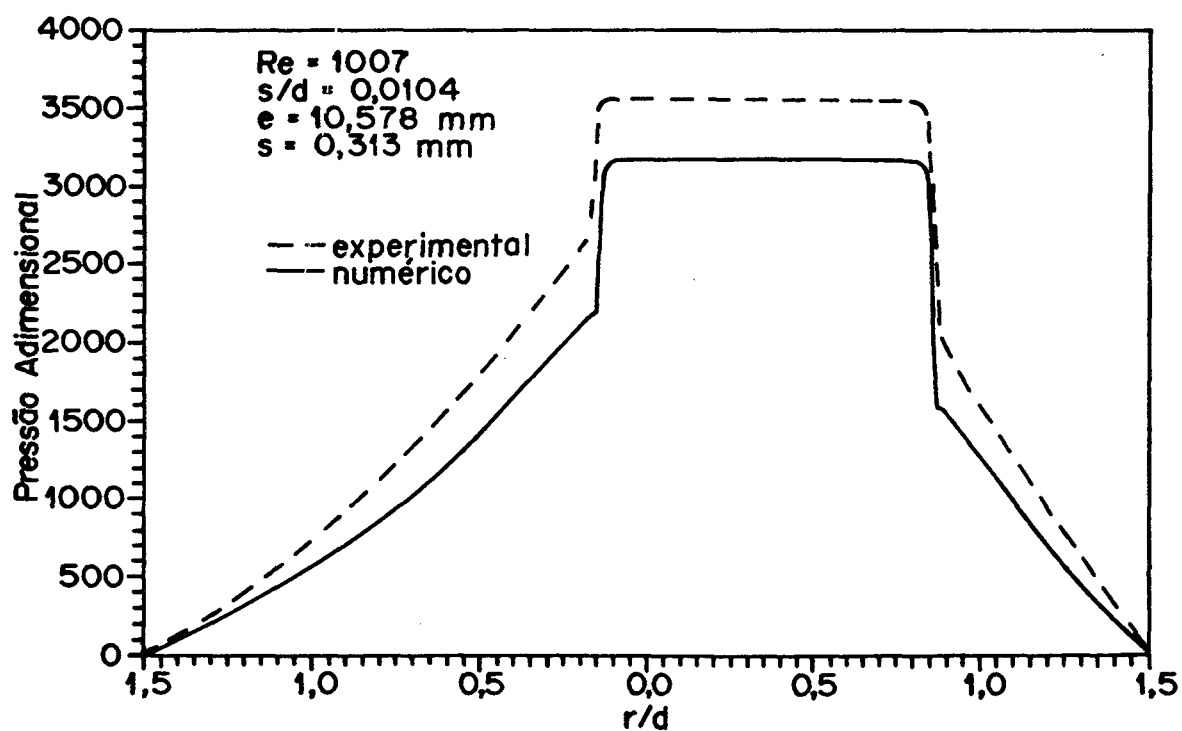


Fig. 4.21 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1007$, $s/d=0,0104$ e $e=10,578 \text{ mm}$.

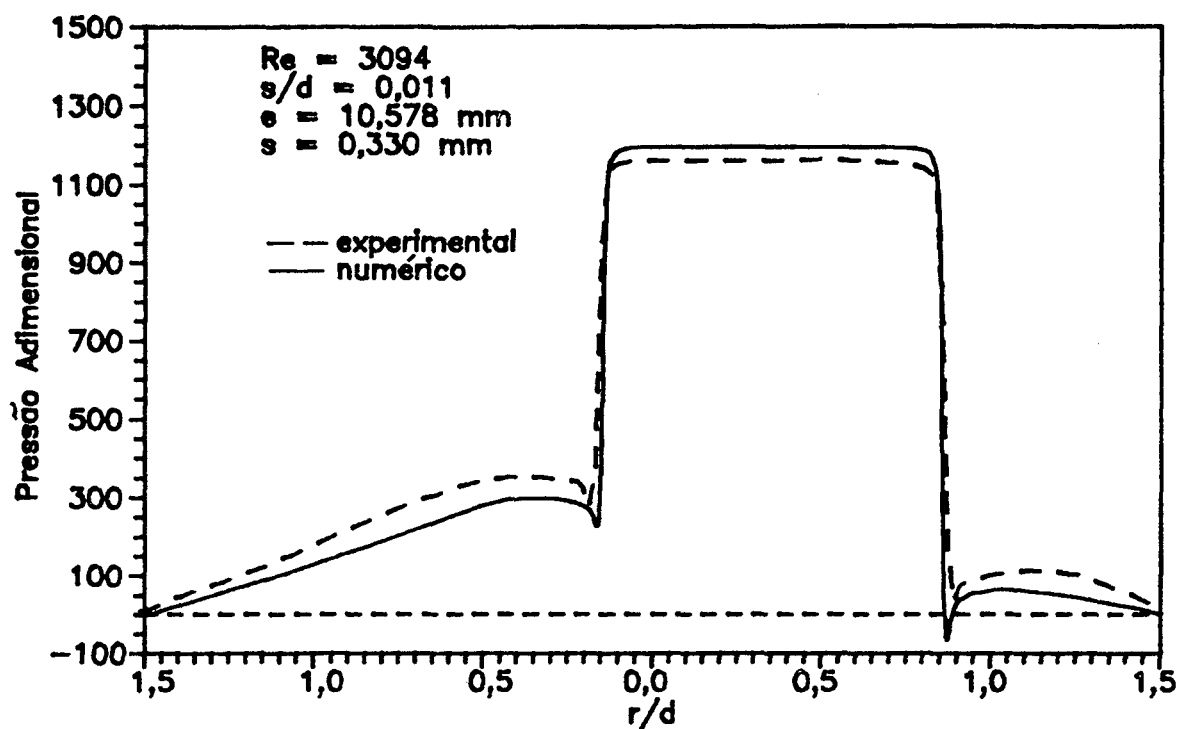


Fig. 4.22 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3094$, $s/d=0,011$ e $e=10,578 \text{ mm}$.

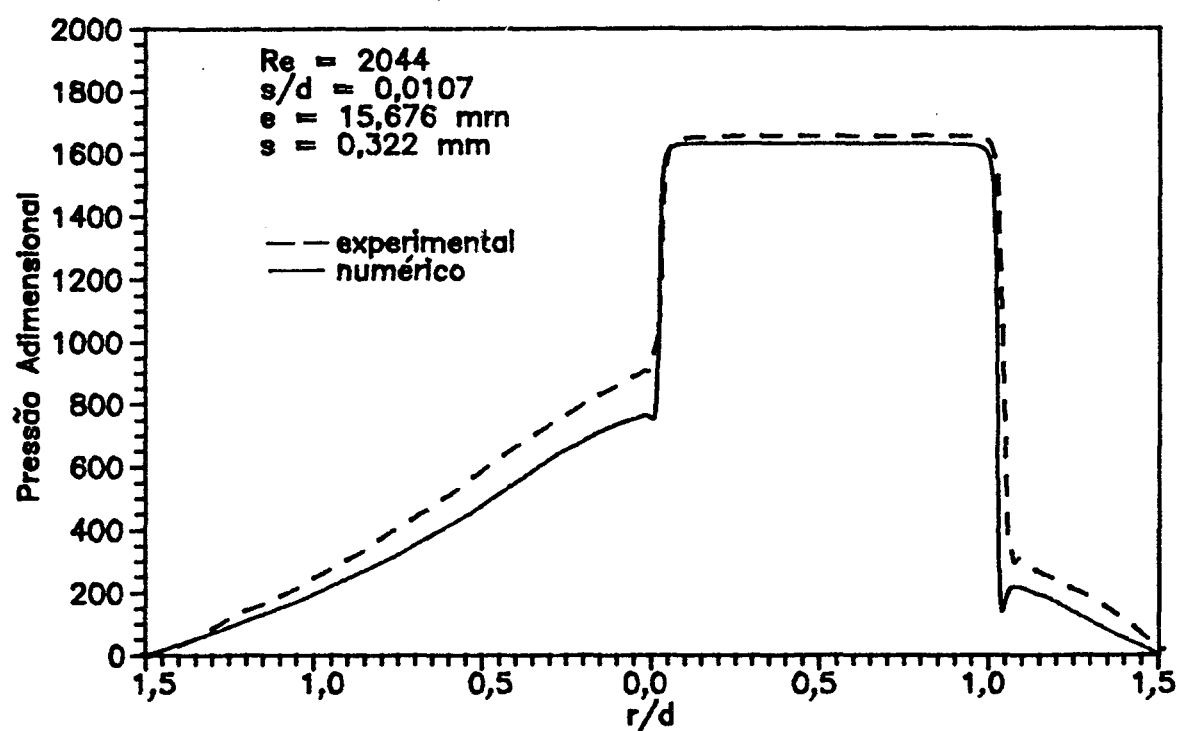


Fig. 4.23 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2044$, $s/d=0,0107$ e $e=15,676 \text{ mm}$.

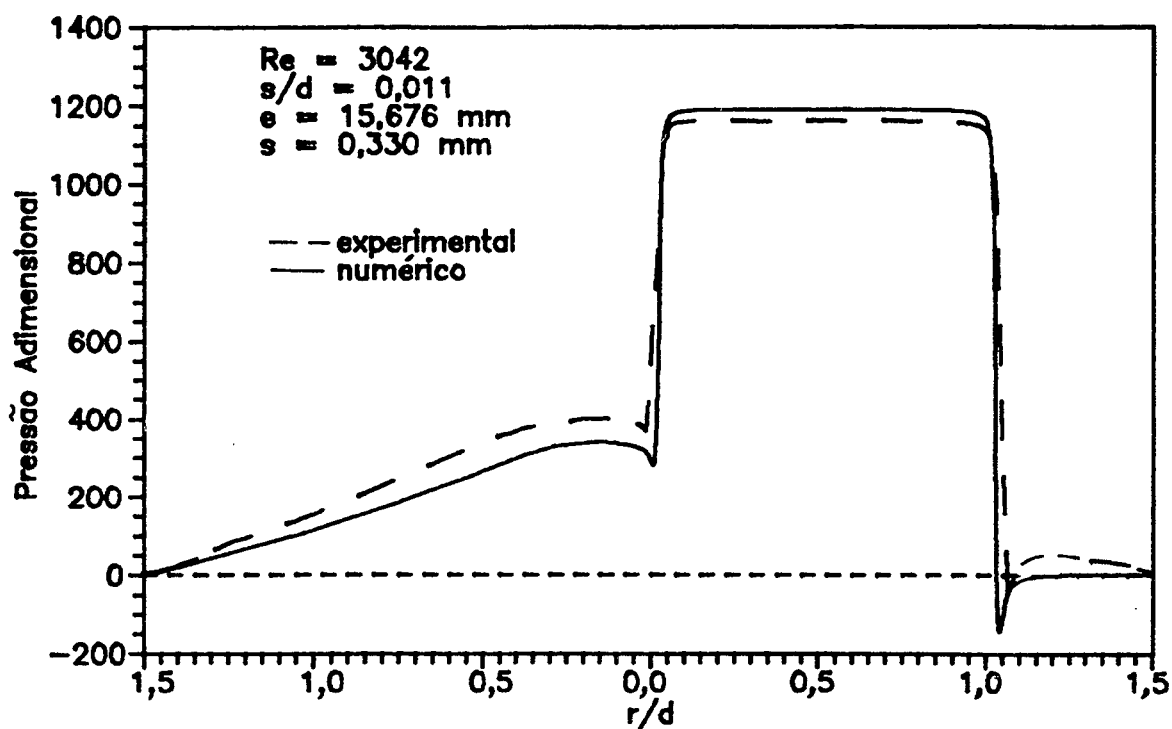


Fig. 4.24 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3042$, $s/d=0,011$ e $e=15,676 \text{ mm}$.

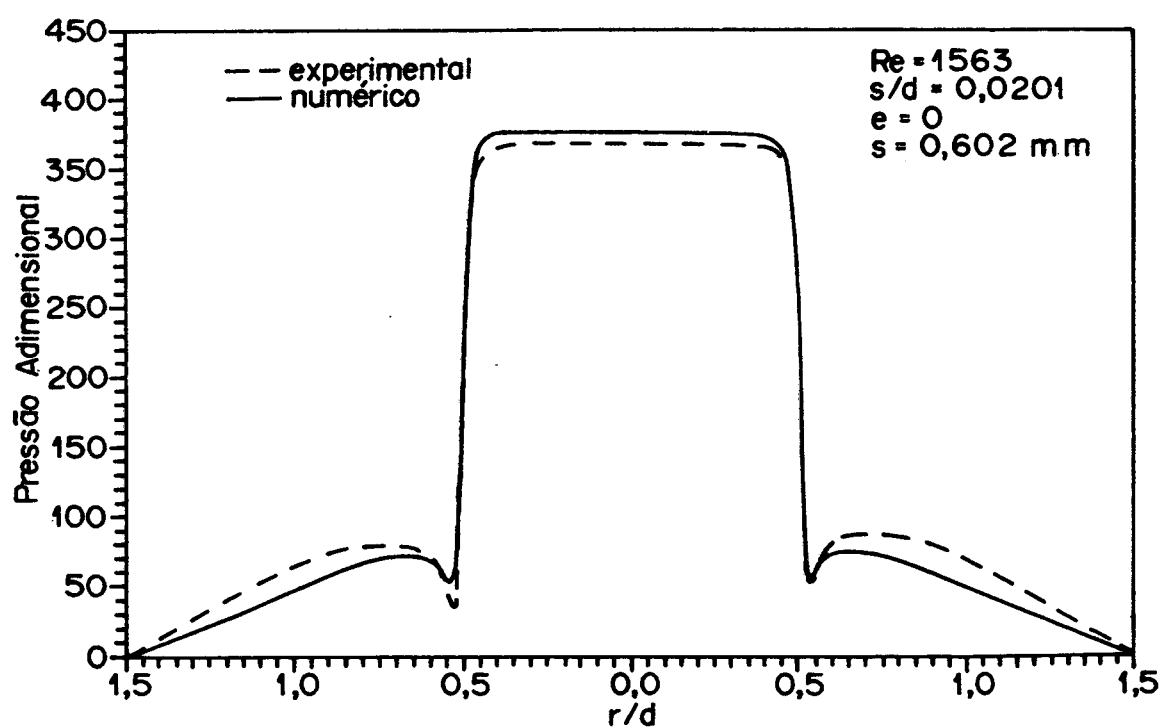


Fig. 4.25 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1563$, $s/d=0,0201$ e $e=0$.

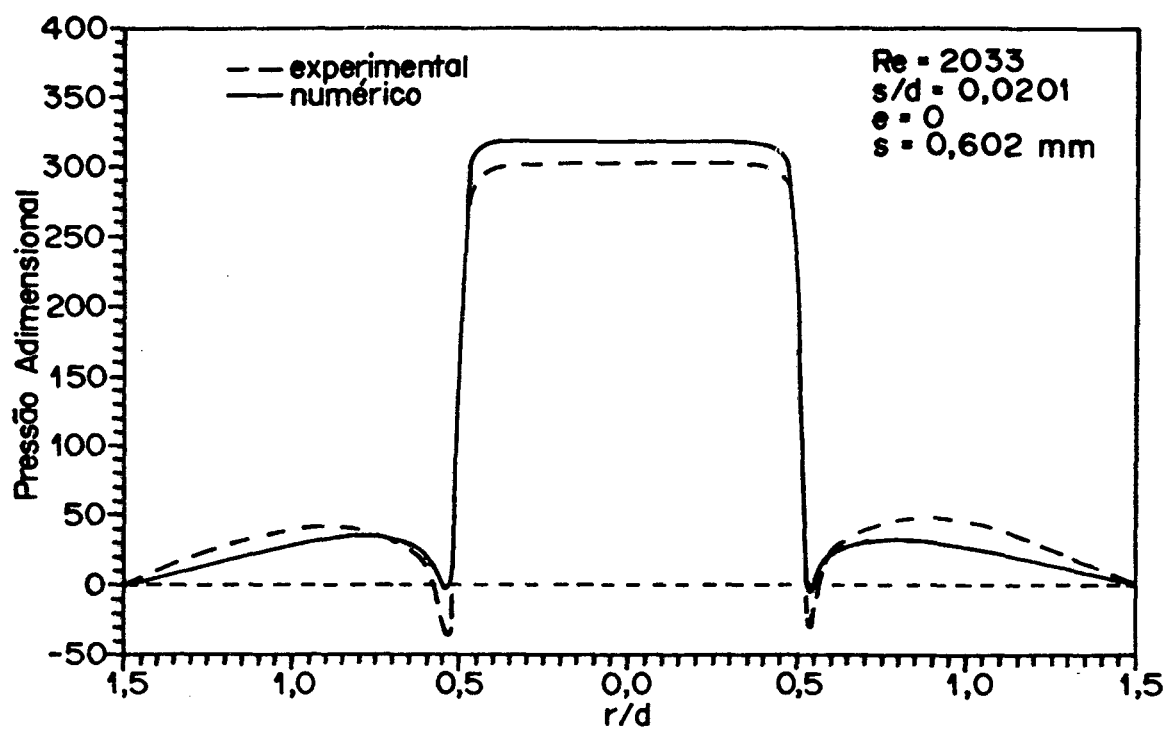


Fig. 4.26 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2033$, $s/d=0,0201$ e $e=0$.

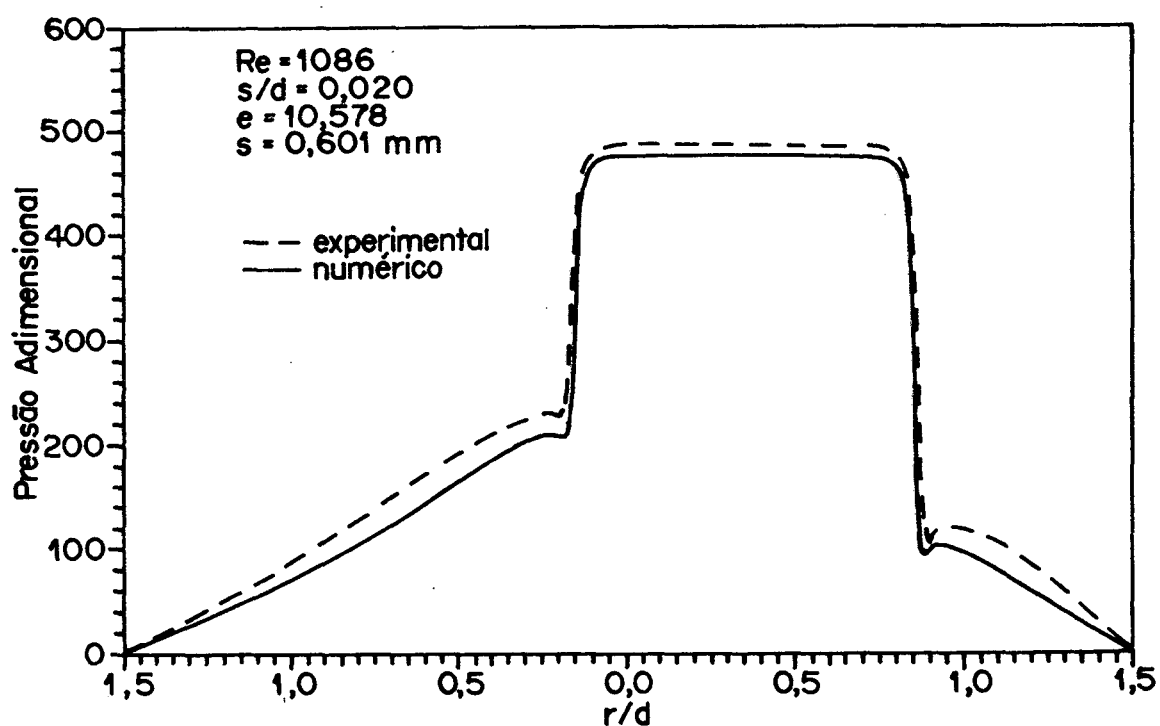


Fig. 4.27 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1086$, $s/d=0,0200$ e $e=10,578$ mm.

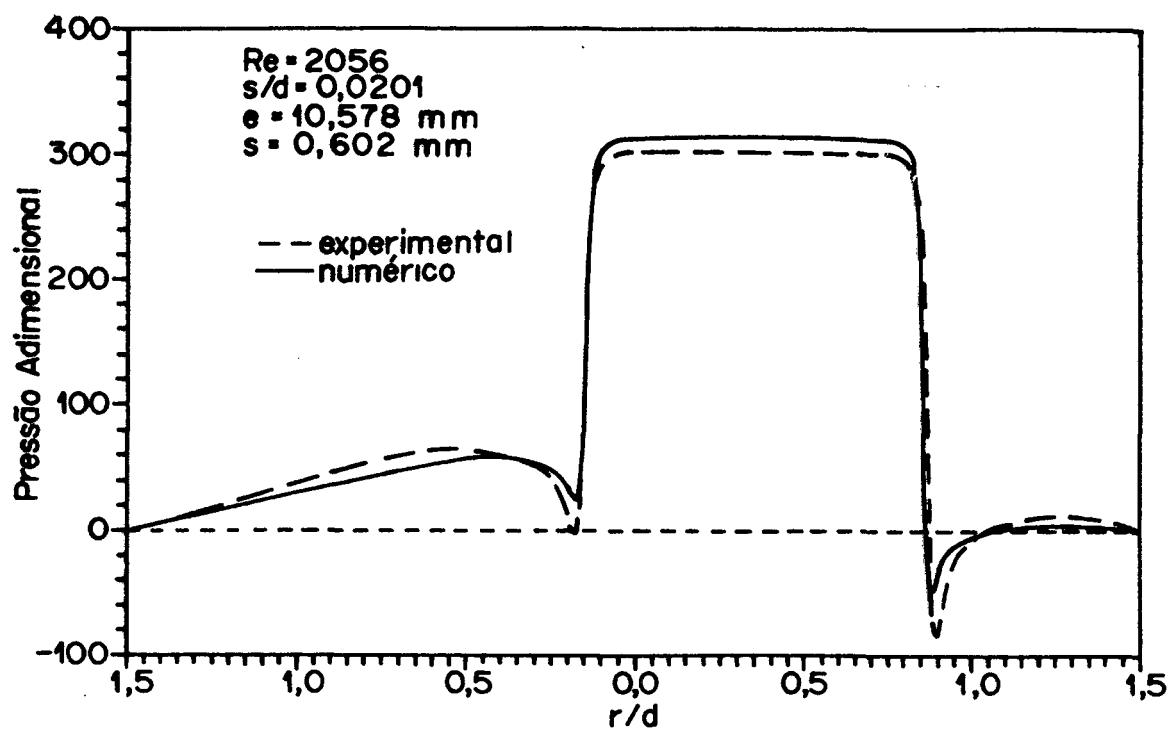


Fig. 4.28 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2056$, $s/d=0,0201$ e $e=10,578 \text{ mm}$.

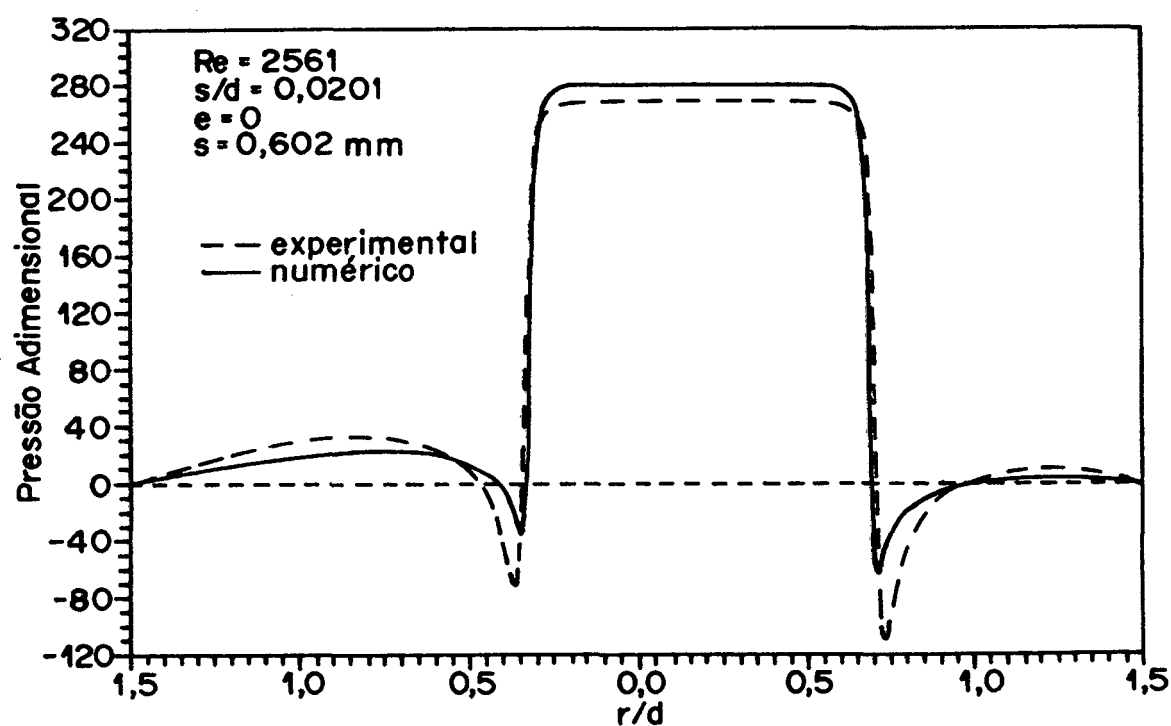


Fig. 4.29 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2561$, $s/d=0,0201$ e $e=0$.

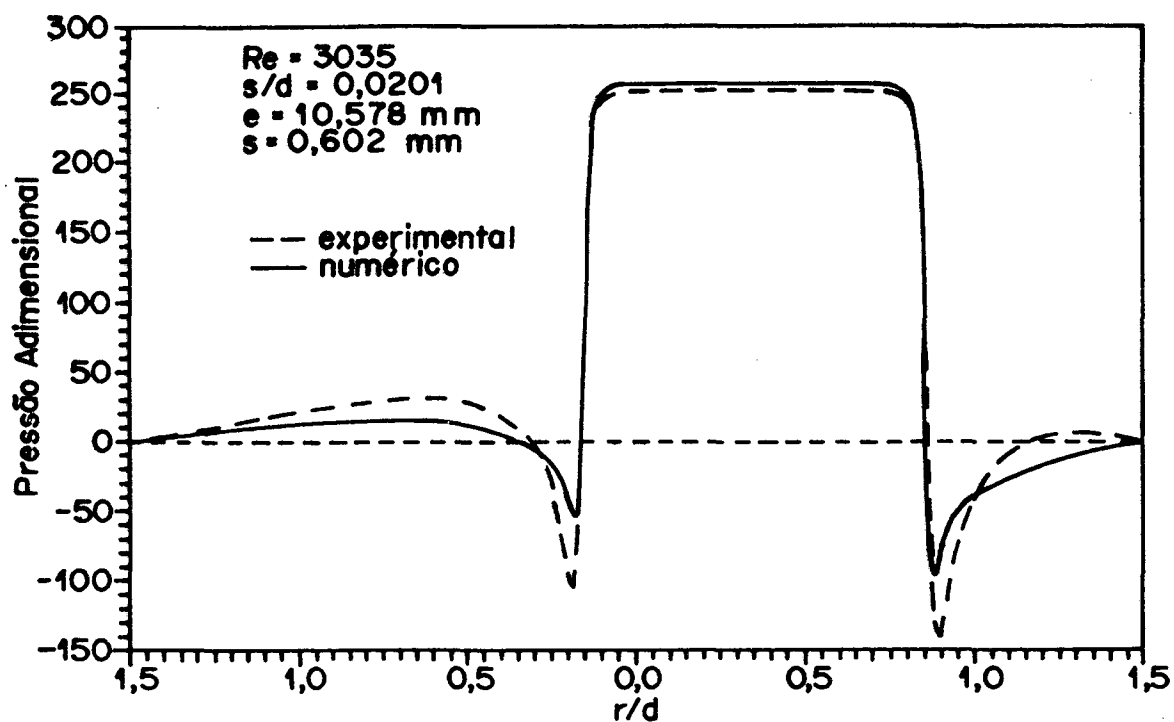


Fig. 4.30 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3035$, $s/d=0,0201$ e $e=10,578 \text{ mm}$.

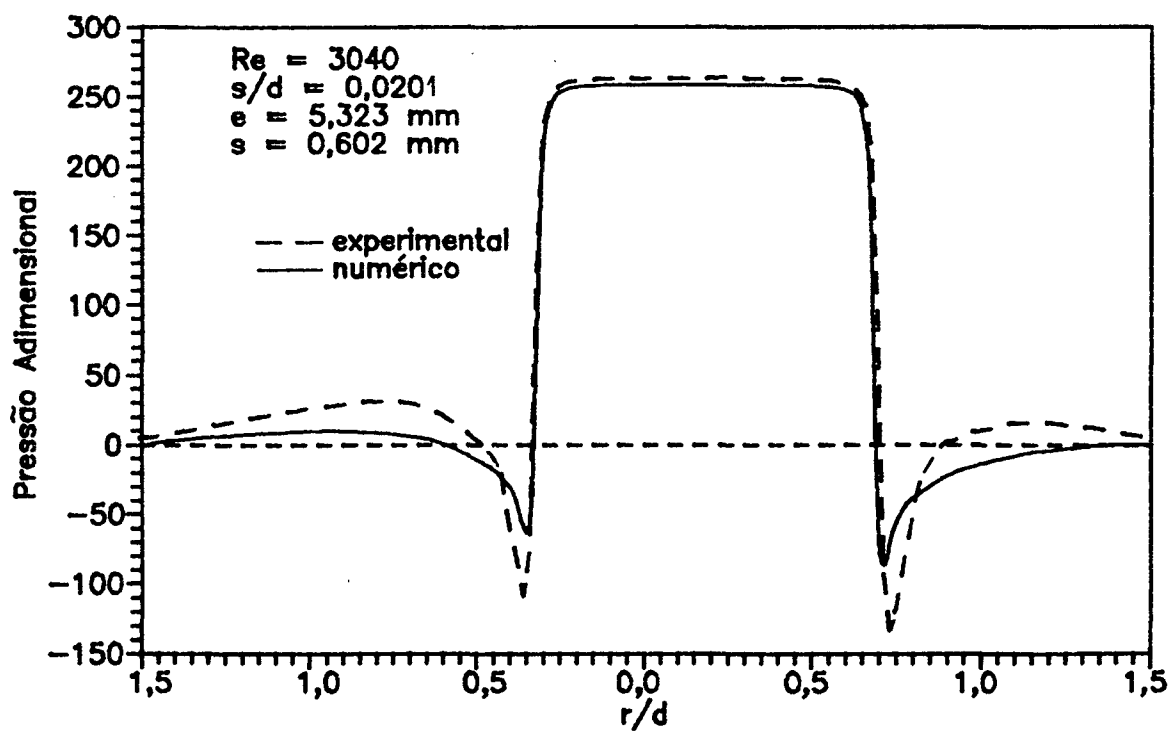


Fig. 4.31 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3040$, $s/d=0,0201$ e $e=5,323 \text{ mm}$.

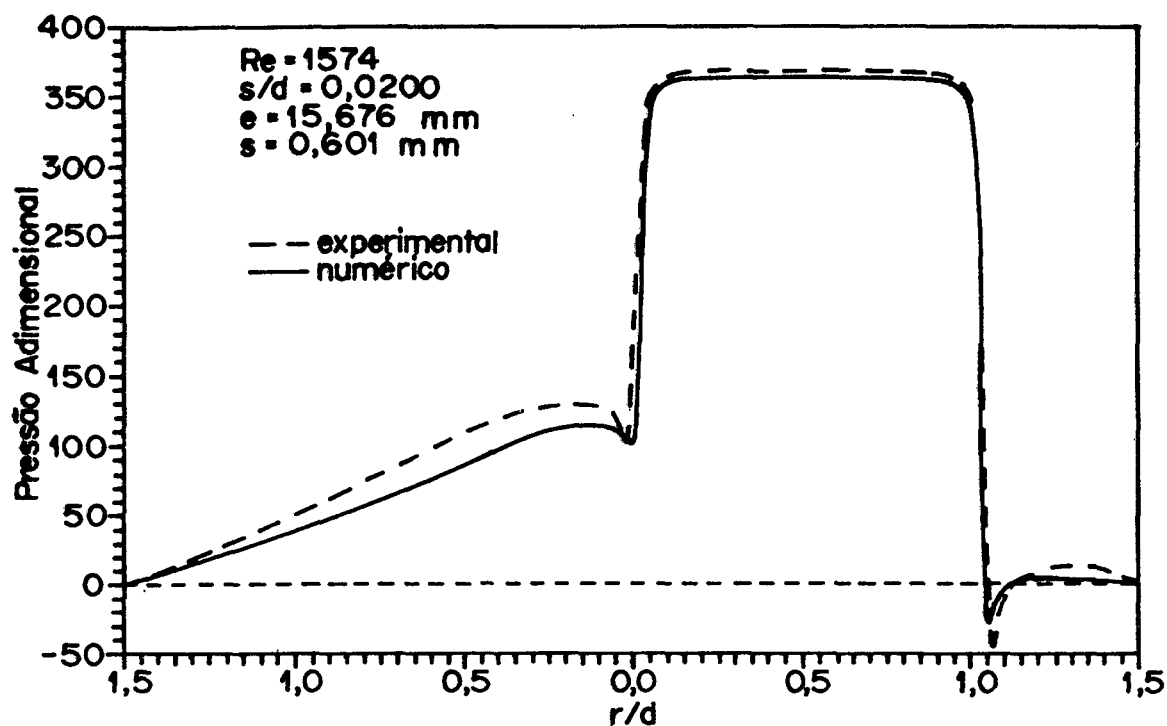


Fig. 4.32 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1574$, $s/d=0,0200$ e $e=15,676 \text{ mm}$.

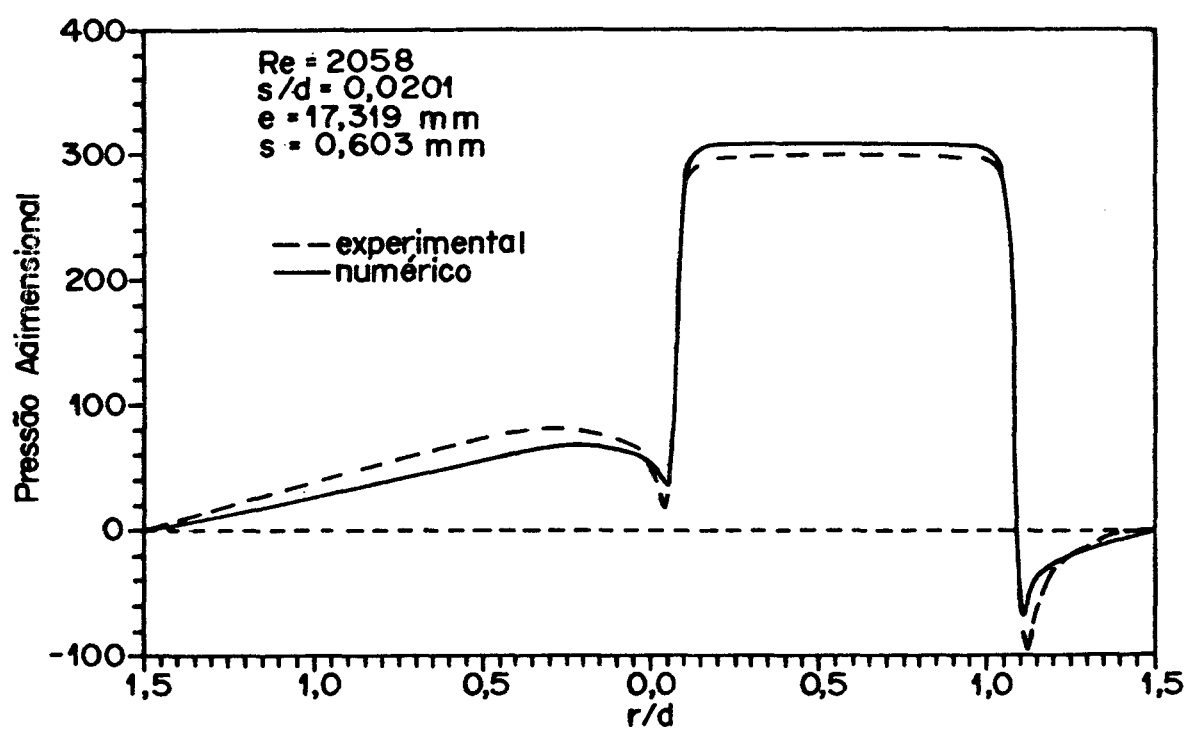


Fig. 4.33 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2058$, $s/d=0,0201$ e $e=17,319 \text{ mm}$.

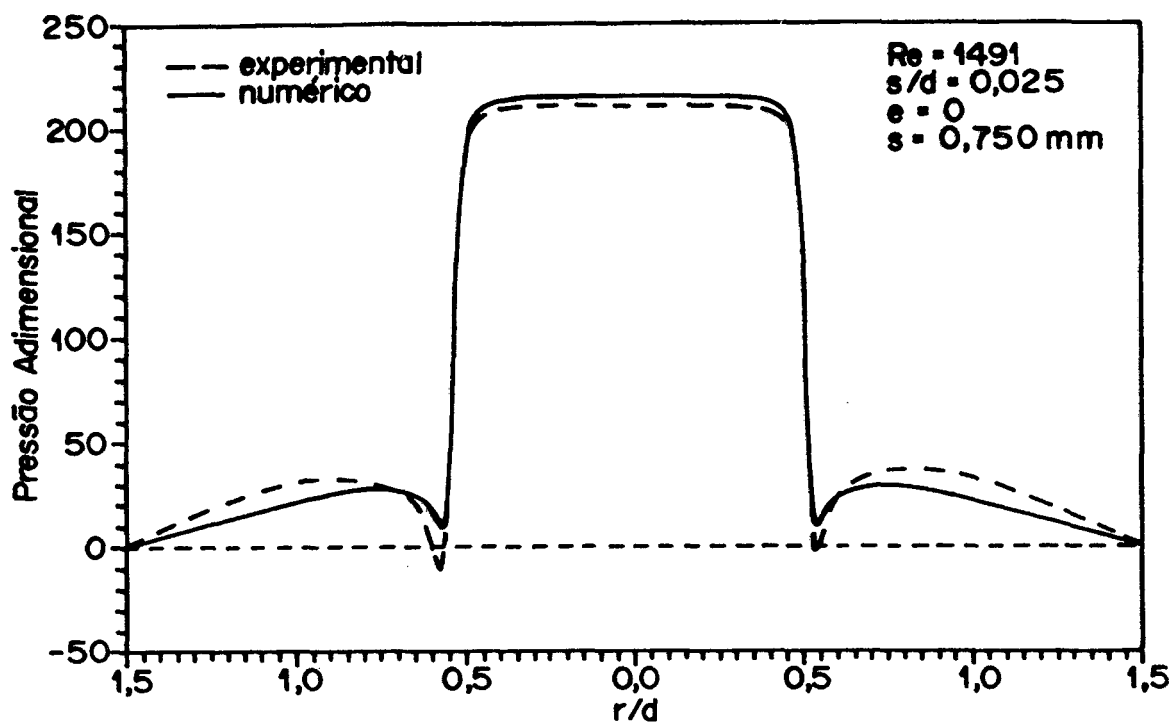


Fig. 4.34 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1491$, $s/d=0,025$ e $e=0$.

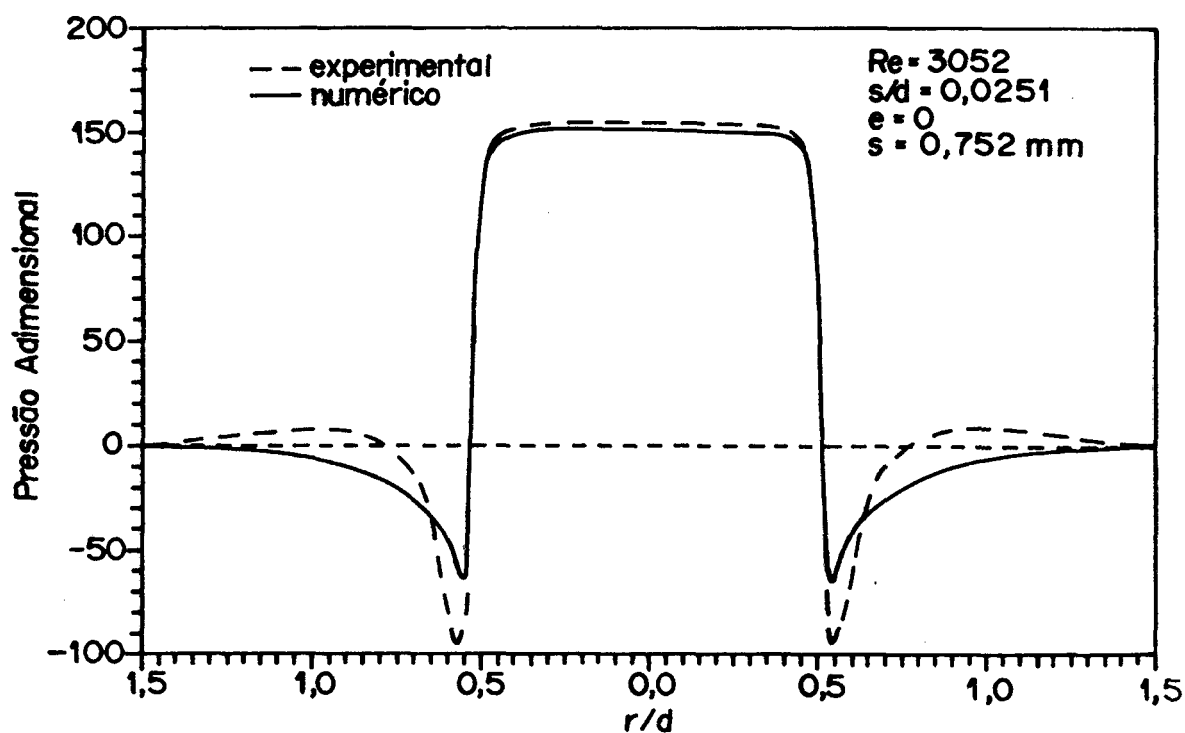


Fig. 4.35 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=3052$, $s/d=0,0251$ e $e=0$.

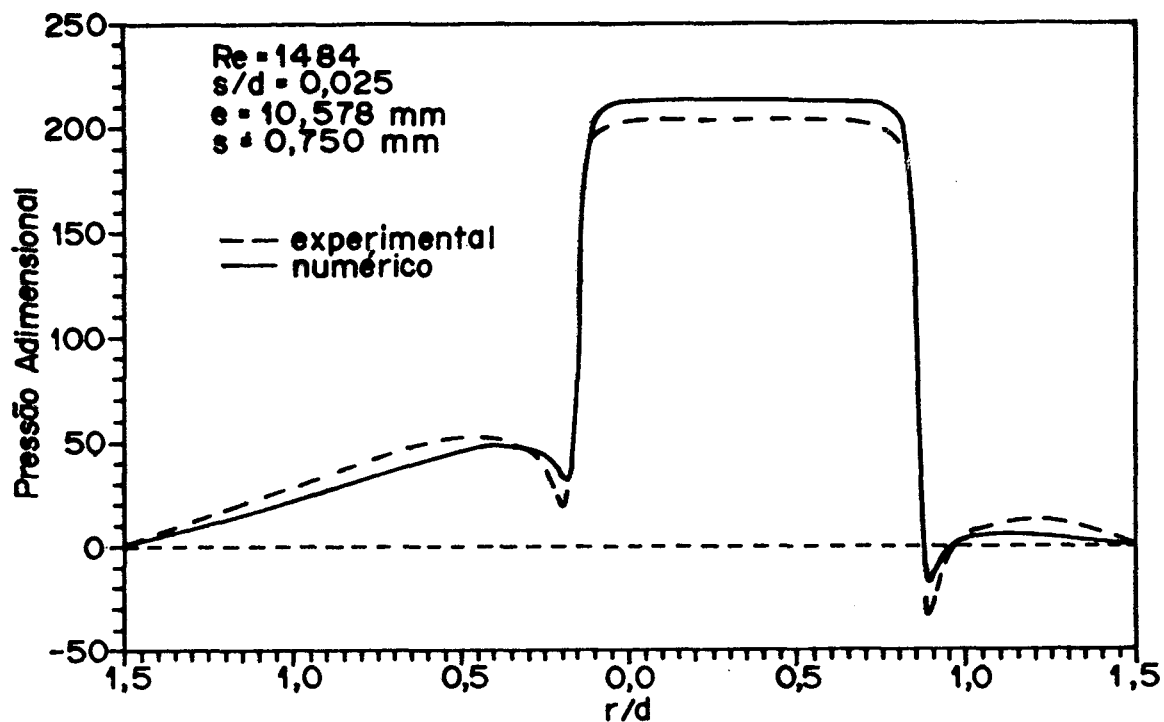


Fig. 4.36 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=1484$, $s/d=0,025$ e $e=10,578 \text{ mm}$.

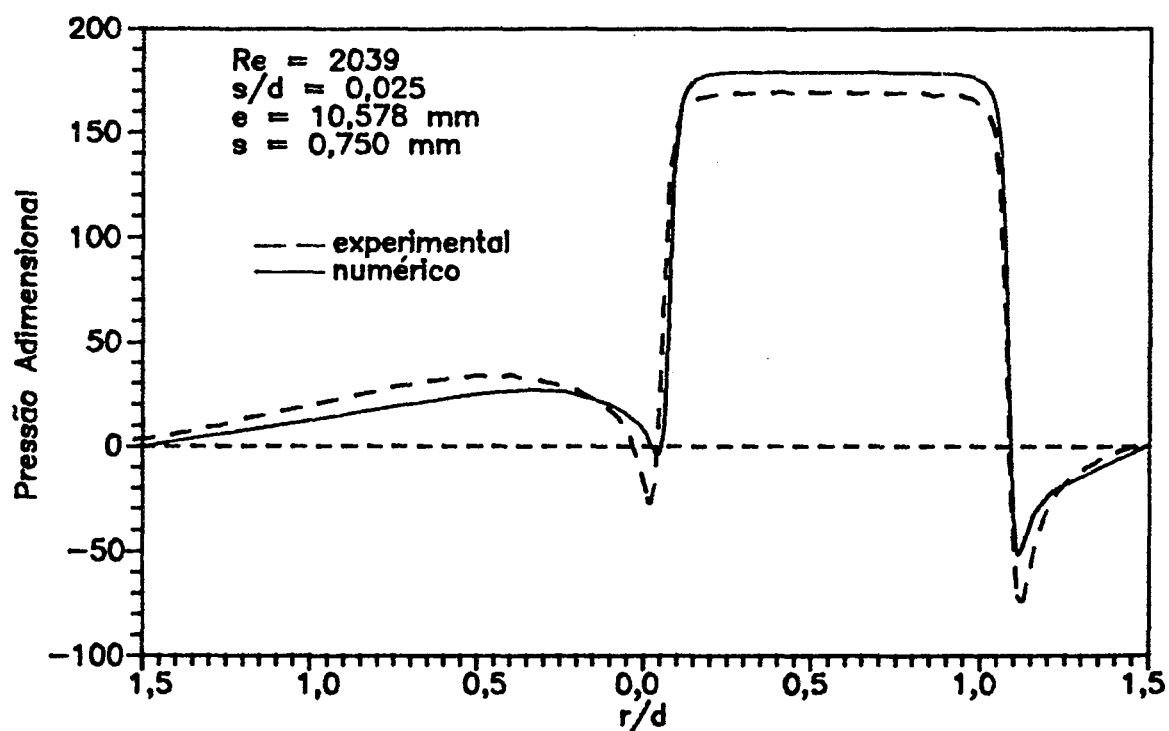


Fig. 4.37 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2039$, $s/d=0,025$ e $e=10,578 \text{ mm}$.

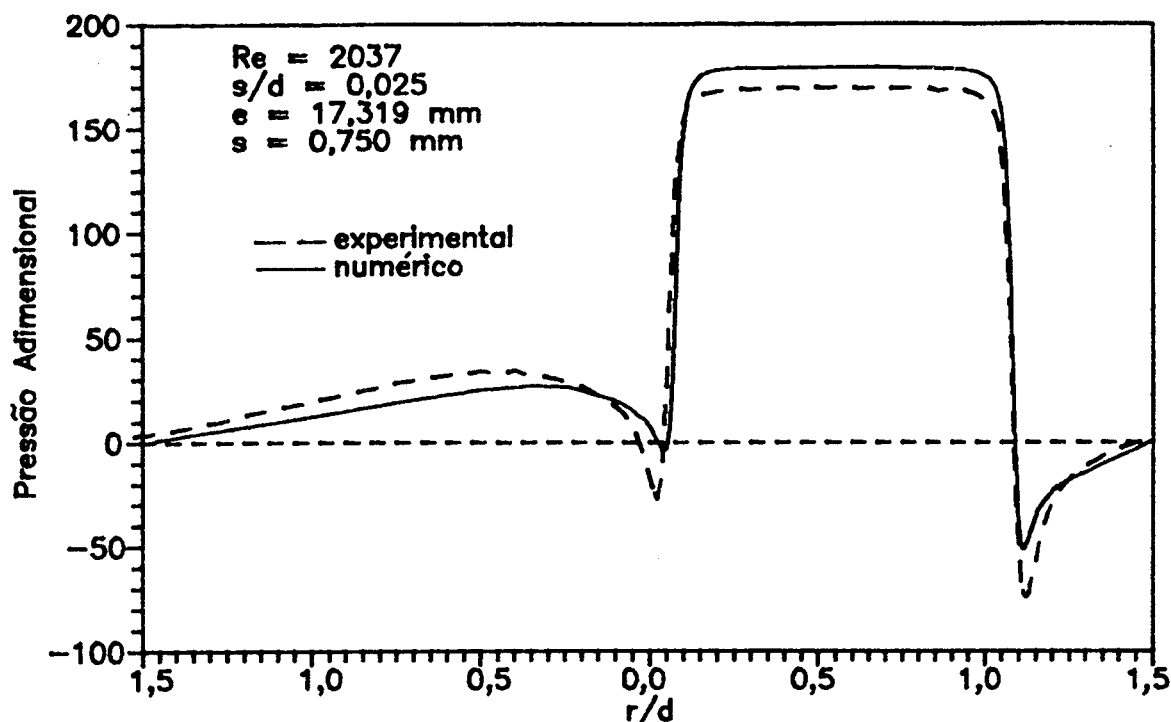


Fig. 4.38 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re=2037$, $s/d=0,025$ e $e=17,319 \text{ mm}$.

O item 3.2.3 apresenta o procedimento utilizado para a determinação da incerteza associada ao ajuste da posição de referência da palheta. Segundo este procedimento, realizou-se dez tomadas de dados mantendo as condições do escoamento as mais próximas possíveis. Em cada uma delas ajustou-se a posição de referência da palheta. Os resultados obtidos para $s/d=0,011$, $e=0$ e $Re_m=3036$ são mostrados na Fig. 4.39. Os números de Reynolds máximo e mínimo medidos, dentre os dez casos, foram 3039 e 3032, respectivamente. Para a geometria descrita e o número de Reynolds médio, Re_m , obteve-se a solução numérica correspondente, observando-se uma boa comparação entre os resultados.

Outros resultados semelhantes são mostrados nas Figs. 4.40 a 4.42.

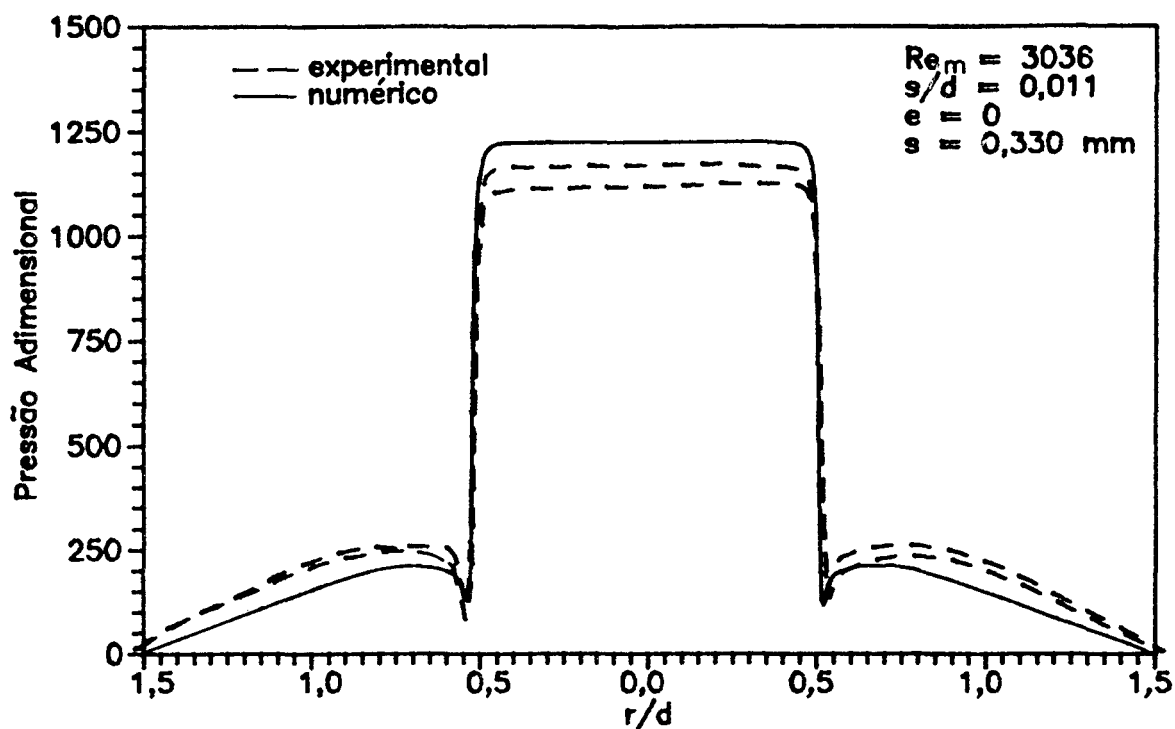


Fig. 4.39 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re_m = 3036$, $s/d = 0,011$ e $e = 0$.

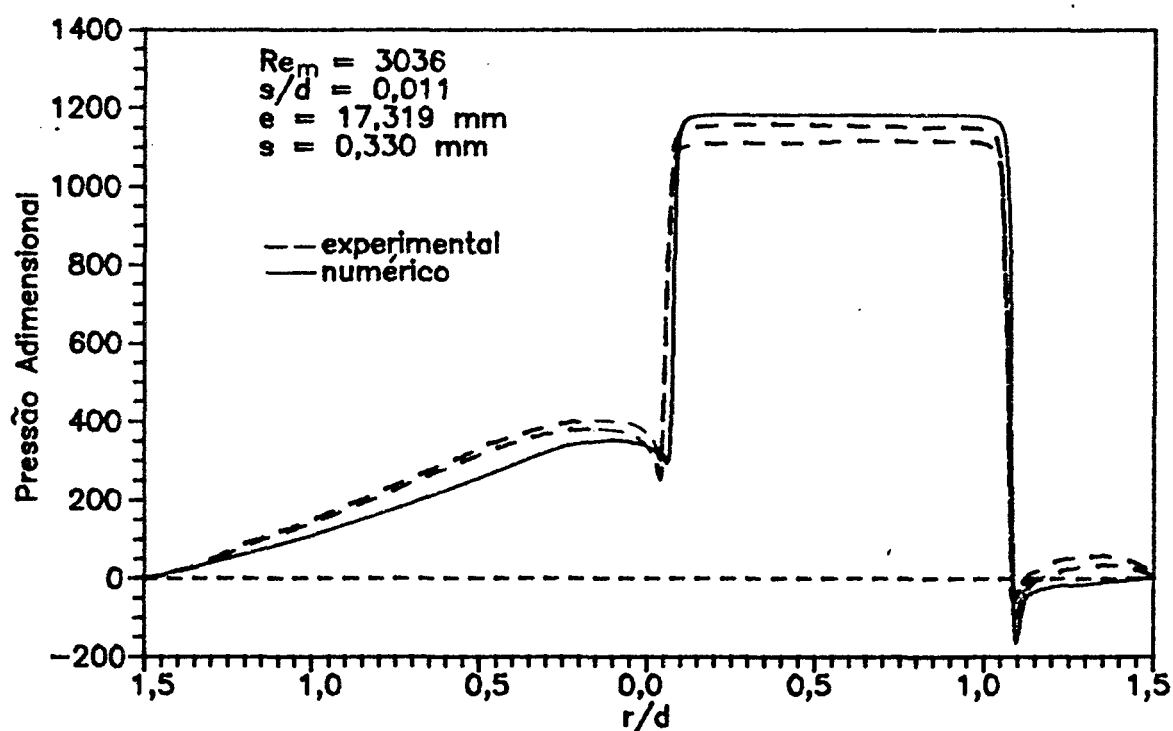


Fig. 4.40 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re_m = 3036$, $s/d = 0,011$ e $e = 17,319$ mm.

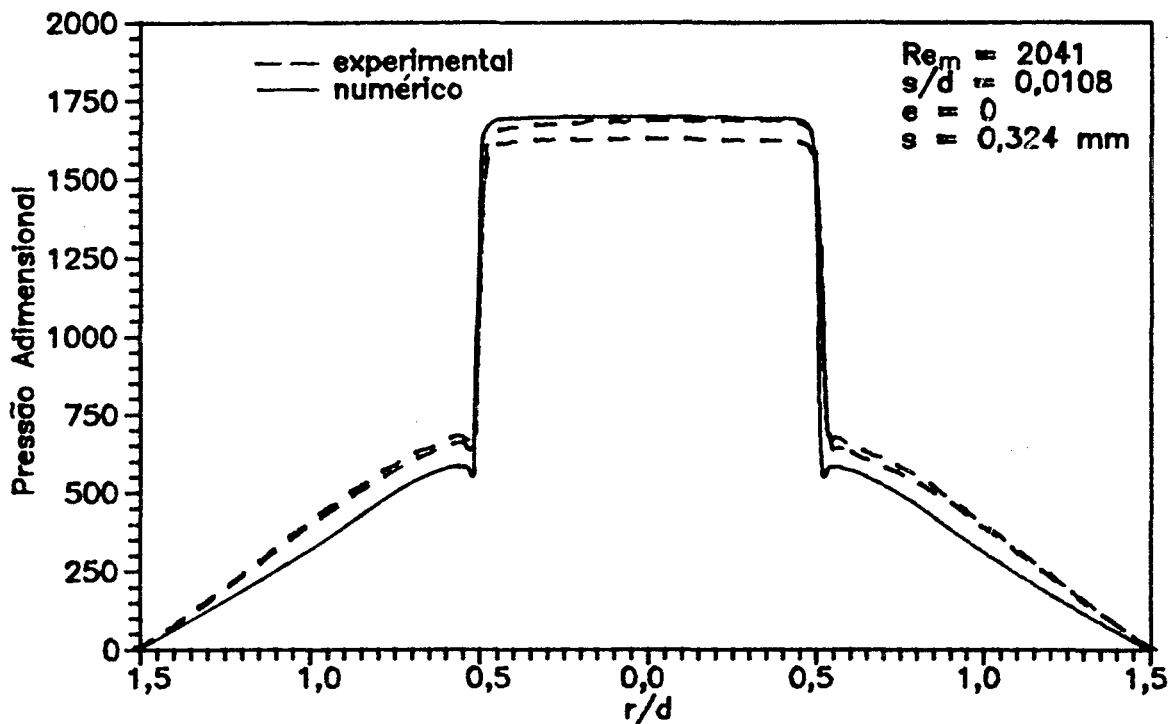


Fig. 4.41 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re_m = 2041$, $s/d = 0,0108$ e $e = 0$.

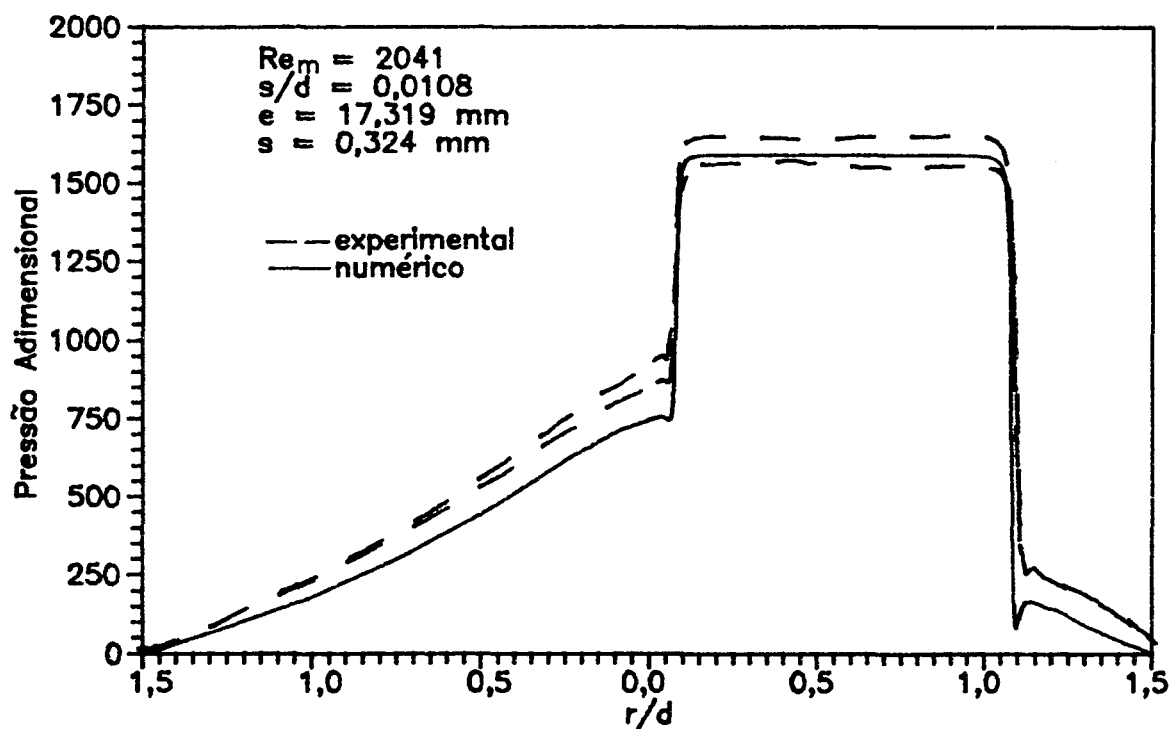


Fig. 4.42 - Comparação entre os resultados experimental e numérico para $Re_m = 2041$, $s/d = 0,0108$ e $e = 17,319 \text{ mm}$.

Analisando os resultados anteriores, verifica-se que os resultados numéricos se aproximam razoavelmente bem dos resultados experimentais. Nota-se que na região do patamar de pressão os resultados são muito bons. No entanto, para números de Reynolds elevados e afastamentos maiores a região correspondente ao difusor não apresenta comparações do mesmo nível.

Na obtenção da solução numérica usou-se a lei de potência para o cálculo das variáveis nas faces dos volumes de controle. Contudo, este procedimento leva em consideração somente os termos convectivos e difusivos da equação da quantidade de movimento para a determinação da função de interpolação, ou seja, a variável da face de um volume de controle é influenciada pelos seus vizinhos somente pela convecção e difusão. Henau *et al.* [06] mostram que este procedimento resulta em um erro na determinação da pressão e apresenta outra forma de obter-se a função de interpolação. Neste procedimento, a função de interpolação é determinada através da solução da equação da quantidade de movimento na direção principal do escoamento, composta pelos termos difusivos, convectivos e de pressão. Para o presente caso, esta equação é dada por (para a região do difusor),

$$\frac{\rho h v}{\mu} \frac{dv}{d\eta} - \frac{d^2 v}{d\eta^2} = -s \quad (4.21)$$

onde
$$s = \frac{h}{\mu} \frac{dp}{d\eta} \quad (4.22)$$

Na tentativa de melhorar os resultados numéricos na região do difusor, implementou-se a metodologia proposta por Henau no modelo numérico. No entanto, não se observaram diferenças significativas nos resultados.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS E COMENTÁRIOS

5.1. Introdução

Após a validação do modelo numérico através de resultados analíticos e experimentais, mostrada no capítulo anterior, é importante explorar com maior profundidade as variáveis envolvidas no escoamento e outras que não são medidas no experimento. Com isto, a influência de certos parâmetros geométricos pode ser melhor investigada e, conseqüentemente, o escoamento passa a ser melhor compreendido.

Este capítulo tem como objetivos apresentar e discutir os resultados numéricos para diversas variáveis do escoamento, tais como: perfil radial de pressão sobre a palheta, força sobre a palheta, perfis de velocidade, etc.. Analisa-se, também, o comportamento de outras variáveis, importantes na simulação do próprio compressor, tais como áreas efetivas de força e de escoamento.

Os resultados numéricos são gerados pelo método dos volumes finitos com uma malha de 14x54x40 pontos. As equações discretizadas são resolvidas pelo algoritmo SIMPLE e os valores das variáveis nas faces dos volumes são determinadas através da lei de potência [02].

5.2. Perfil radial de pressão sobre a palheta

A pressão atuando na superfície da palheta é adimensionalizada segundo a equação,

$$p^* = \frac{p}{1/2 \rho \bar{w}^2} \quad (5.1)$$

onde \bar{w} é a velocidade média do escoamento no orifício de passagem.

As Figs. 5.1 a 5.6 mostram a influência do número de Reynolds, afastamento e excentricidade entre palheta e assento sobre o perfil adimensional de pressão ao longo da palheta. Três números de Reynolds são analisados: 500, 1500 e 3000. Para cada um deles, dois valores de afastamentos adimensionais são usados: 0,01 e 0,03 e, para cada afastamento, quatro excentricidades: 0, 5, 10 e 15 mm.

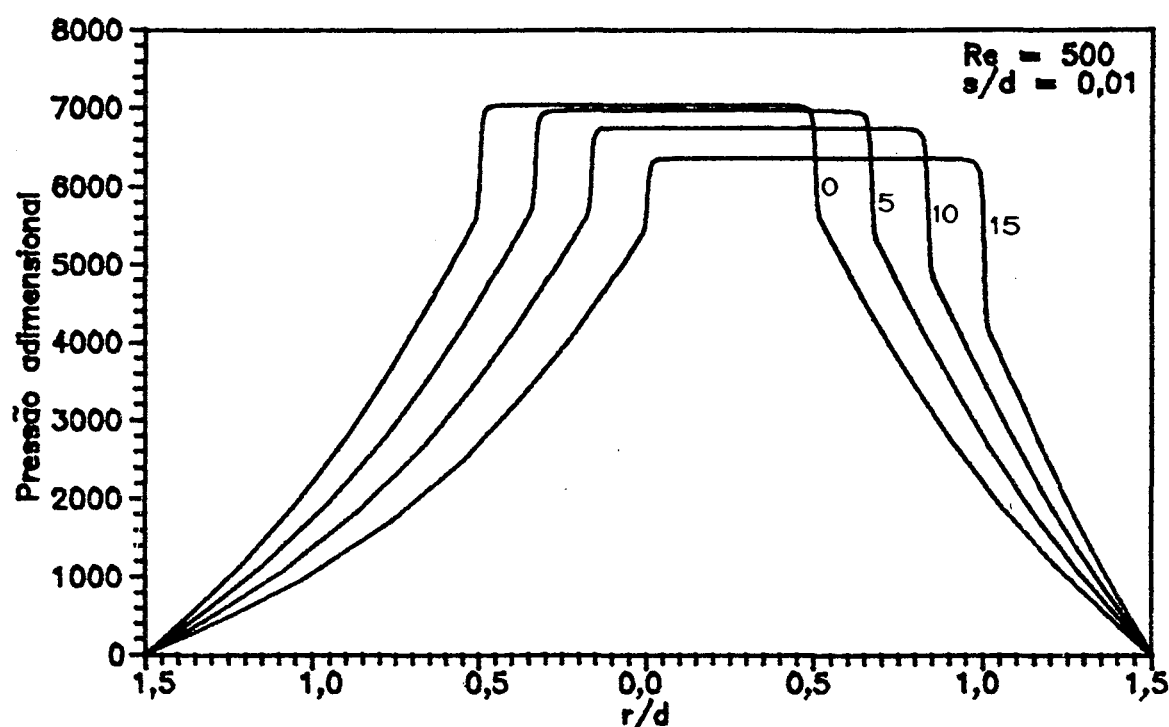


Fig. 5.1 - Perfil adimensional de pressão para $Re=500$ e $s/d=0,01$.

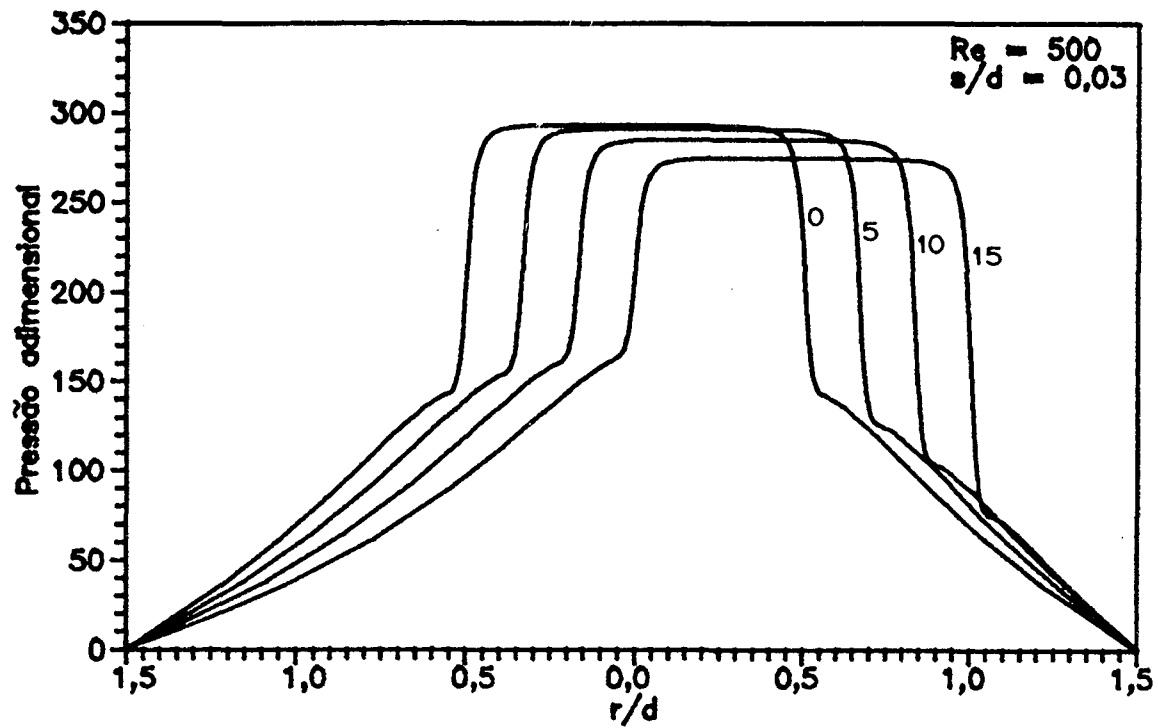


Fig. 5.2 - Perfil adimensional de pressão para $Re=500$ e $s/d=0,03$

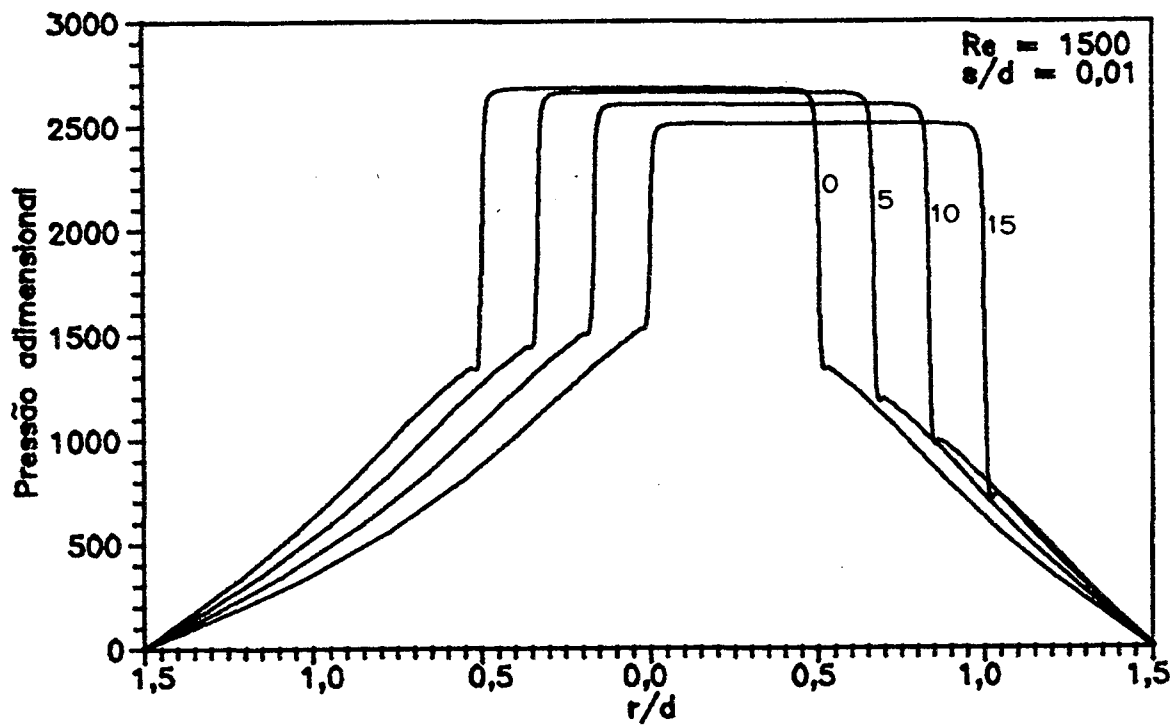


Fig. 5.3 - Perfil adimensional de pressão para $Re=1500$ e $s/d=0,01$.

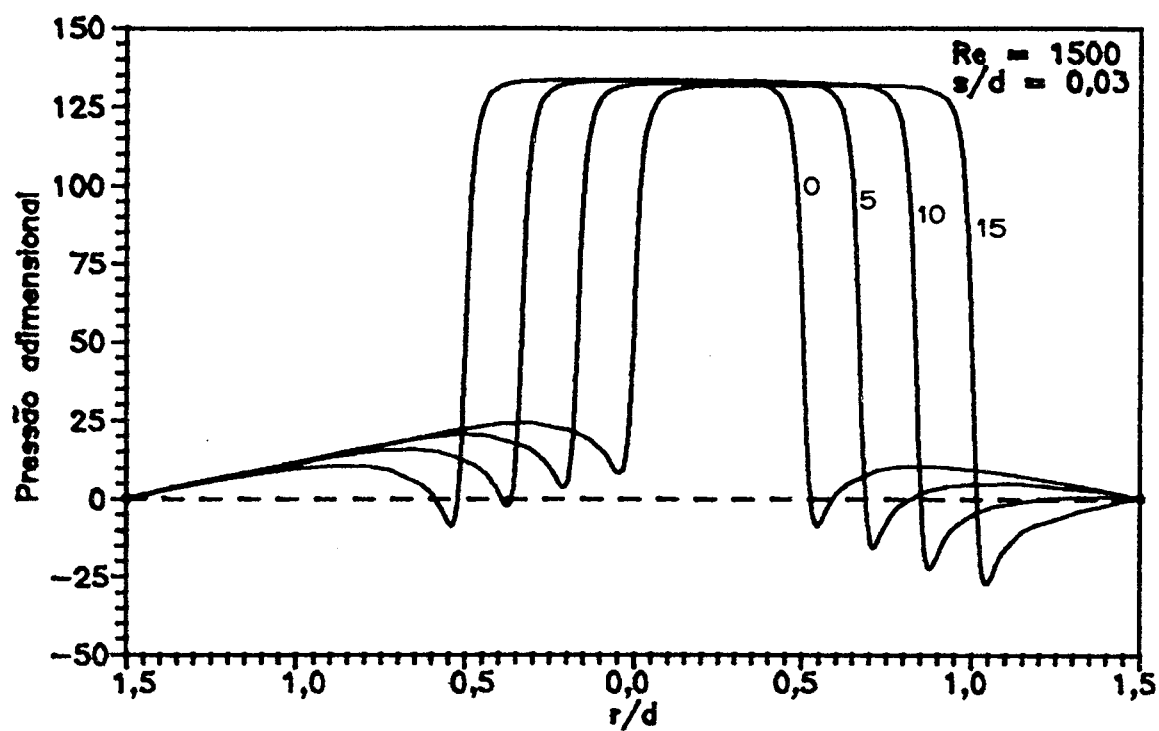


Fig. 5.4 - Perfil adimensional de pressão para $Re=1500$ e $s/d=0,03$.

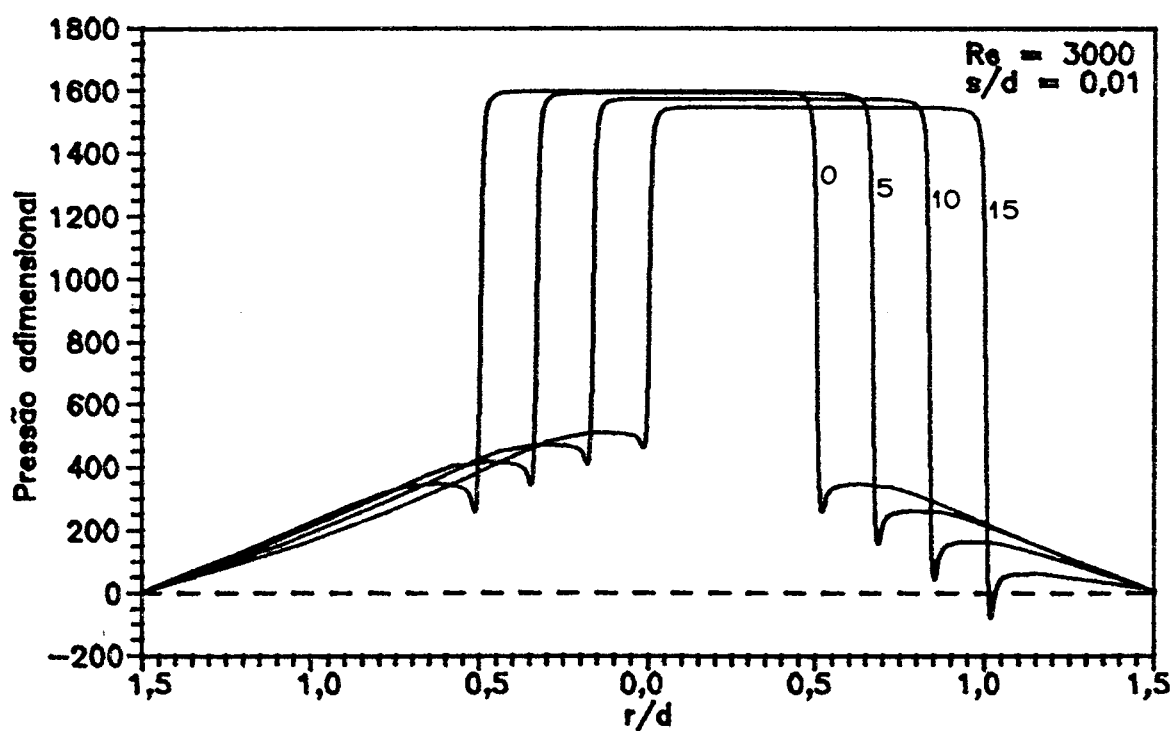


Fig. 5.5 - Perfil adimensional de pressão para $Re=3000$ e $s/d=0,01$.

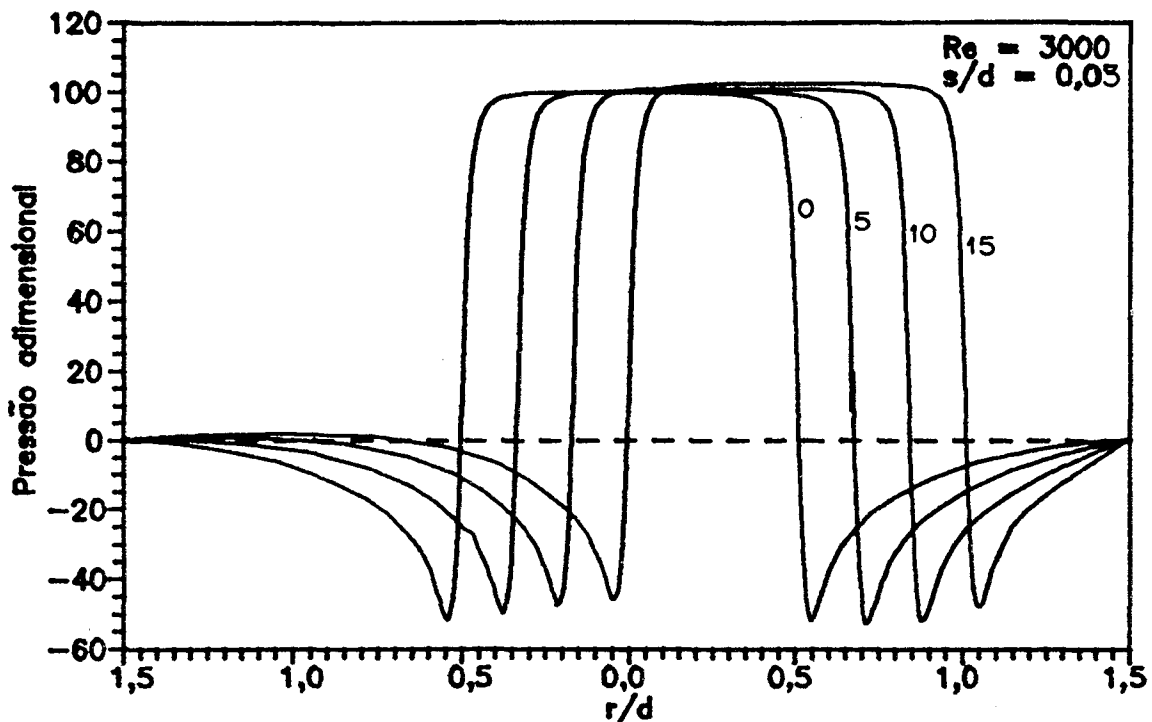


Fig. 5.6 - Perfil adimensional de pressão para $Re=3000$ e $s/d=0,03$.

Analisando os resultados anteriores, observa-se a grande influência do afastamento e número de Reynolds sobre o perfil adimensional de pressão, especialmente para $s/d=0,01$. A influência da excentricidade, no entanto, é relativamente pequena. Para $s/d=0,01$ verifica-se que aumentando a excentricidade ocorre uma queda do patamar de pressão para todos os números de Reynolds analisados. Isto significa que o aumento da excentricidade provoca uma redução da resistência ao escoamento.

Para $s/d=0,03$ a mesma tendência é notada para $Re=500$ e, em menor escala, para $Re=1500$. Contudo, para Reynolds maiores, $Re=3000$, observa-se uma tendência inversa, ou seja, existe uma maior resistência ao escoamento, causando uma diminuta elevação no patamar de pressão quando se aumenta a excentricidade. Isto pode ser explicado

pelo aparecimento de grandes bolhas de separação na região do difusor, o que provoca um maior estrangulamento do escoamento, aumentando sua resistência. A Fig. 5.33 mostra o comprimento de separação do escoamento em função do número de Reynolds para os dois afastamentos analisados. Este parâmetro fornece o comprimento da bolha de separação, ou seja, a região onde ocorre a recirculação do fluido. Nota-se que, para $s/d=0,01$, o crescimento da bolha é relativamente pequeno com o número de Reynolds. Entretanto, a bolha cresce rapidamente com o número de Reynolds para $s/d=0,03$.

5.3. Forças dimensional e adimensional sobre a palheta

A força resultante que atua sobre a superfície da palheta é um parâmetro importante no presente estudo, pois é sua magnitude a responsável pela abertura e fechamento da válvula de um compressor de refrigeração.

As Figs. 5.7 e 5.8 apresentam os gráficos da força dimensional em função da excentricidade para vários números de Reynolds e afastamentos.

Pela análise da Fig. 5.7 pode-se dizer que para $s/d=0,01$ a força dimensional diminui com a queda do número de Reynolds. A influência da excentricidade, no entanto, é muito pequena, observando-se somente uma pequena queda no valor da força à medida que a excentricidade aumenta. O mesmo não acontece para $s/d=0,03$. À medida que o número de Reynolds aumenta de 500 a 1500 observa-se um crescimento no valor da força. Contudo, o aumento do número de Reynolds de 1500 para 3000 produz uma queda no valor da força, devido ao aumento da depressão sobre a palheta. Nota-se, também, que, para $Re=500$, a força diminui levemente com o aumento da excentricidade. Para $Re=1500$ ocorre o inverso, pois, o patamar de pressão permanece

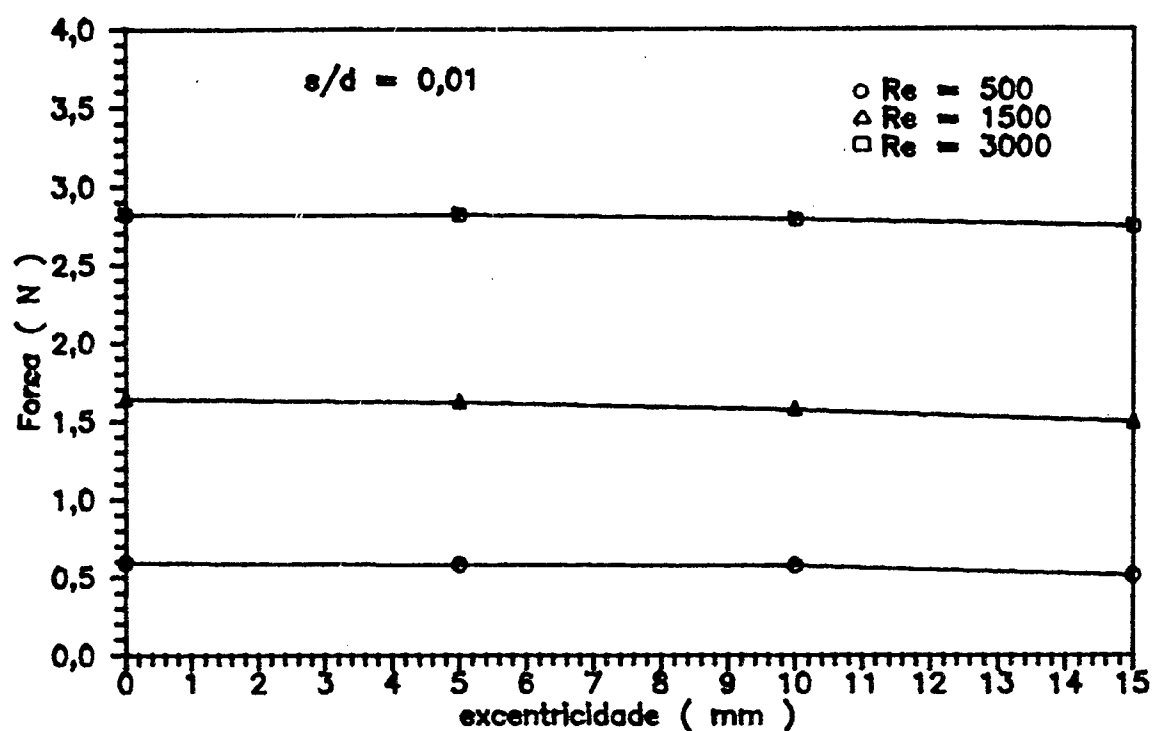


Fig. 5.7 - Força dimensional em função da excentricidade para $s/d=0,01$.

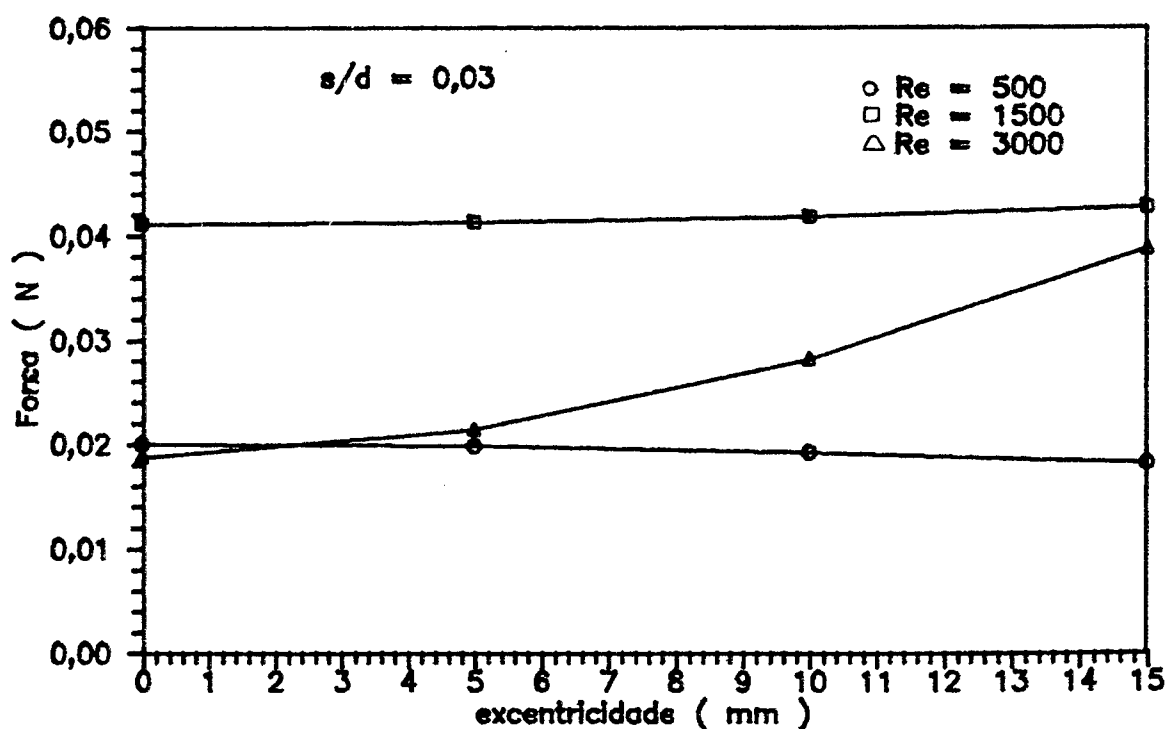


Fig. 5.8 - Força dimensional em função da excentricidade para $s/d=0,03$.

praticamente constante, enquanto ocorre um aumento da pressão numa região maior do escoamento, ver a Fig. 5.4. O mesmo acontece, de maneira mais acentuada, para $Re=3000$, onde se verifica, inclusive, um pequeno aumento do patamar de pressão.

Neste trabalho a força resultante sobre a palheta foi adimensionalizada da seguinte forma:

$$F_{ad} = \int_0^{2\pi} \int_{\eta_2}^{\eta+\infty} \frac{p^*}{d^2} h^2 d\psi d\eta \quad (5.2)$$

As Figs. 5.9 e 5.10 mostram gráficos semelhantes aos anteriores para a força adimensional sobre a palheta.

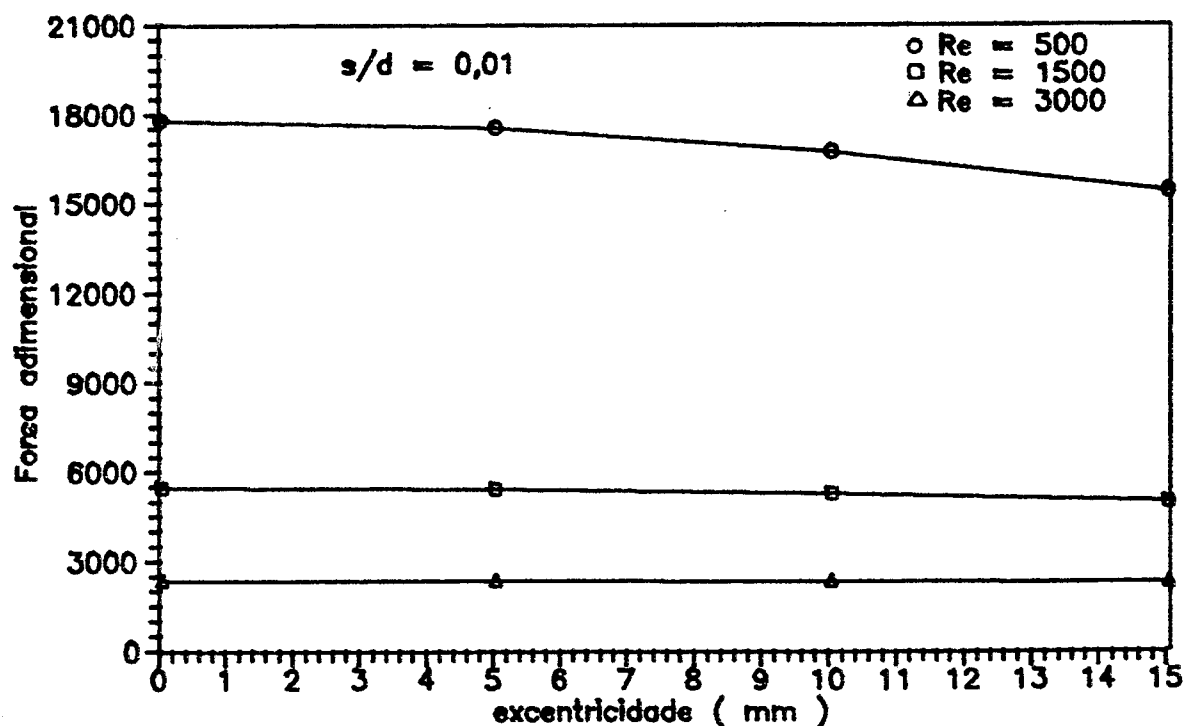


Fig. 5.9 - Força adimensional sobre a palheta para $s/d=0,01$.

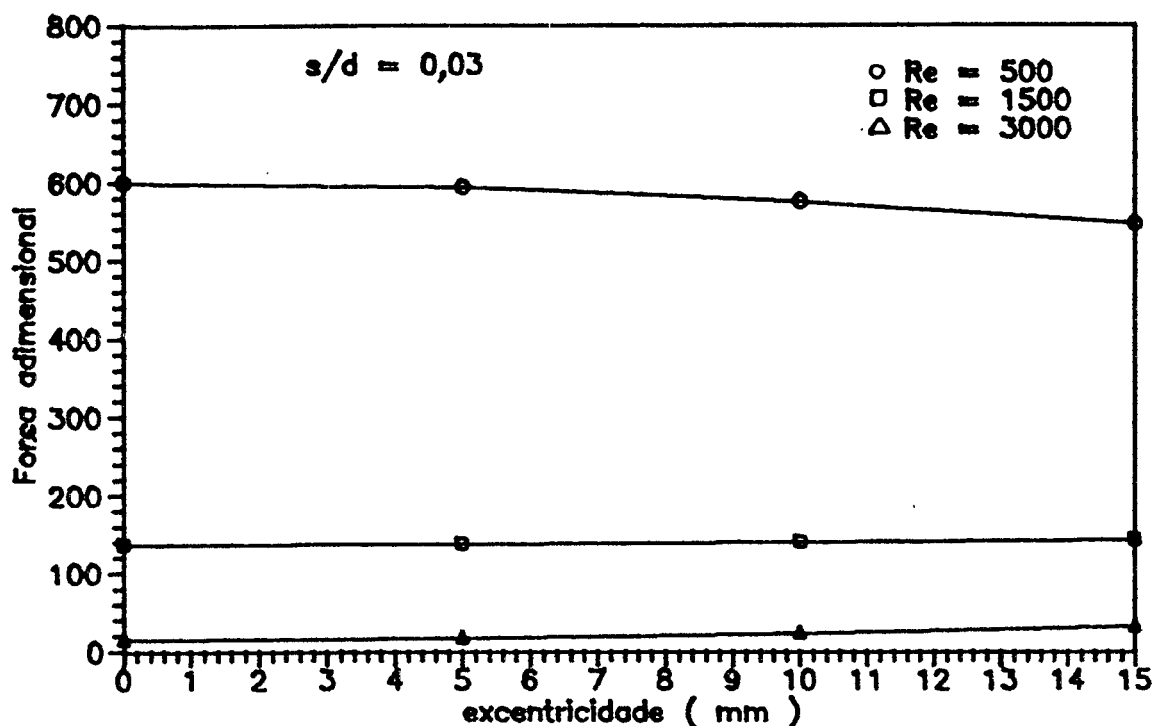


Fig. 5.10 - Força adimensional sobre a palheta para $s/d=0,03$.

O comportamento da força adimensional com o número de Reynolds é invertido em relação ao comportamento da força dimensional, ou seja, a força adimensional diminui com o aumento do número de Reynolds, devido à forma da adimensionalização. No entanto, a influência da excentricidade é semelhante àquela sobre a força dimensional.

5.4. Área efetiva de força

Um parâmetro importante na simulação do sistema de válvula de um compressor de refrigeração é a área efetiva de força, definida como,

$$A_{ef} = \frac{F}{DP_v} \quad (5.3)$$

onde A_{ef} - área efetiva de força;

F - força dimensional sobre a palheta;

DP_v - queda de pressão através da válvula.

As Figs. 5.11 e 5.12 apresentam gráficos da área efetiva de força, adimensionalizada em relação à área do orifício de passagem, em função da excentricidade para vários números de Reynolds e afastamentos.

Os resultados mostram a pouca influência da excentricidade sobre a área efetiva de força. Com exceção do caso onde $Re=3000$ e $s/d=0,01$ seu comportamento é semelhante àqueles das forças dimensionais, acompanhando suas variações. A exceção ocorre pelo fato de que, neste caso, a queda do patamar de pressão e, conseqüentemente, da pressão a montante é menor do que a queda da força dimensional, o que pode ser comprovado pela Fig. 5.5 (a queda do patamar de pressão já não é tão acentuada quanto nos demais casos representados nas Figs. 5.1 e 5.3).

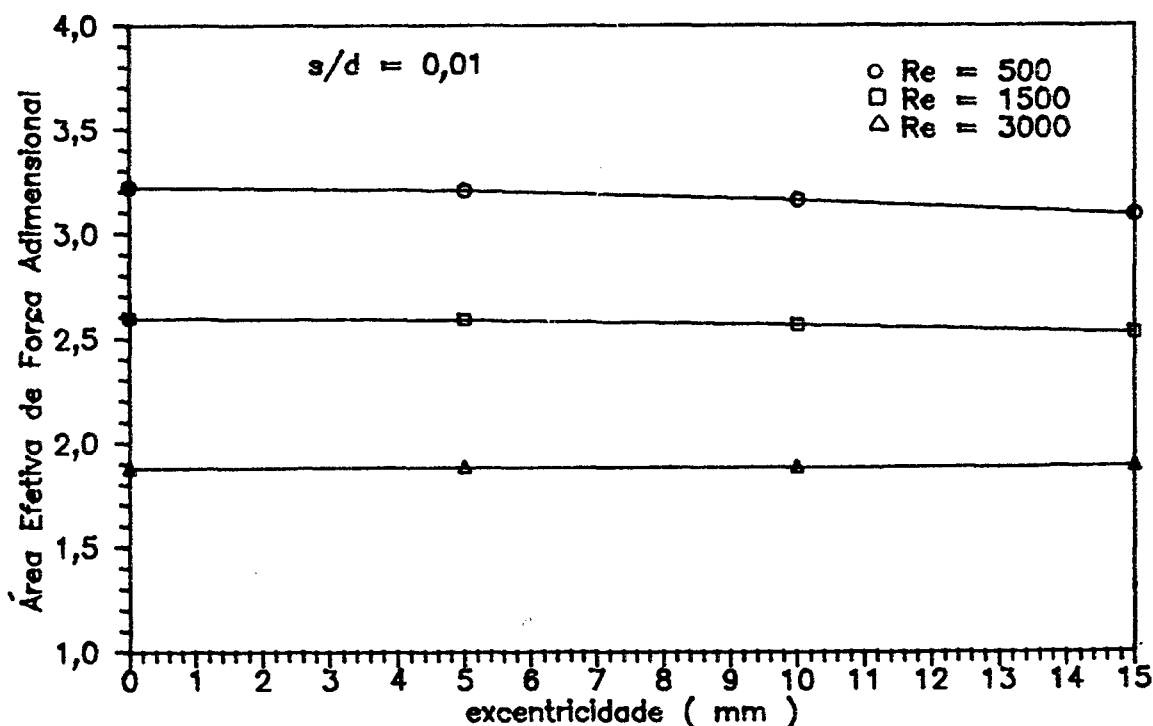


Fig. 5.11 - Área efetiva de força adimensional para $s/d=0,01$.

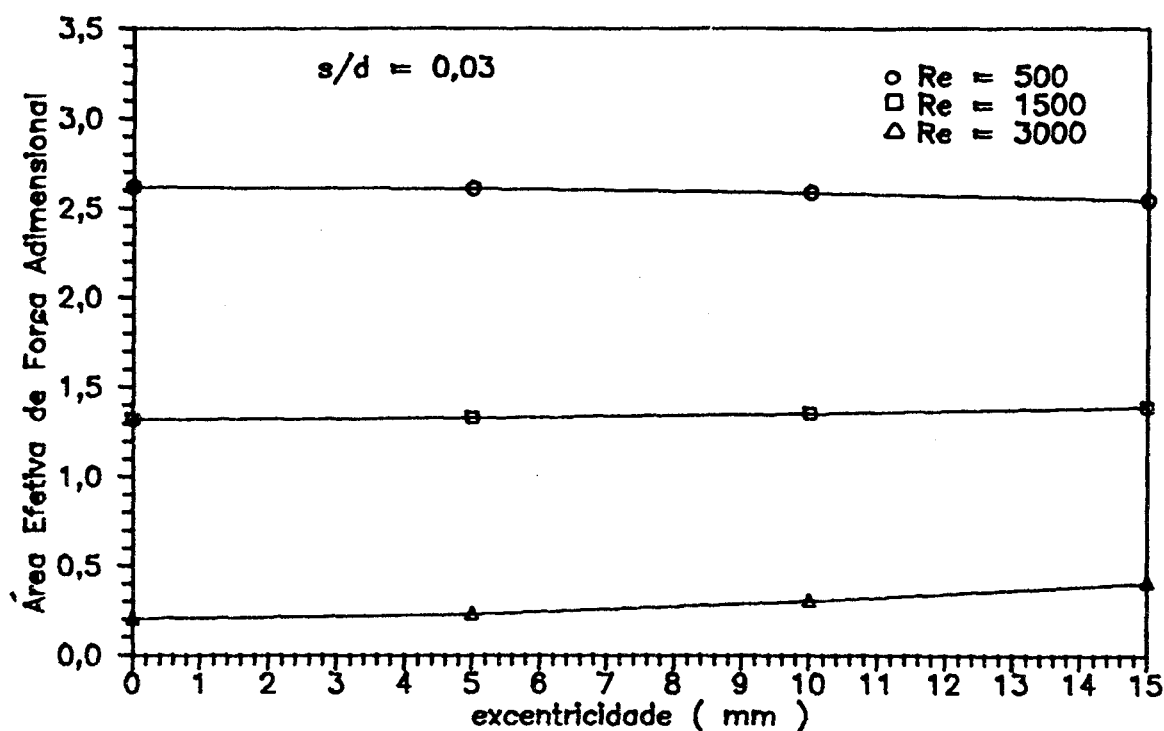


Fig. 5.12 - Área efetiva de força adimensional para $s/d=0,03$.

5.5. Área efetiva de escoamento

A modelação matemática do sistema de válvula de um compressor de refrigeração requer, também, o conhecimento do fluxo de massa na válvula em função de outras variáveis tais como, queda de pressão através da válvula, afastamento entre palheta e assento, etc.. Isto pode ser feito tratando a válvula aberta como um orifício simples de certa área de secção transversal, denominada área efetiva de escoamento.

A Fig. 5.13 mostra o diagrama esquemático de um sistema de válvula de um compressor de refrigeração e a equivalente área efetiva de escoamento, como ilustração. A determinação do fluxo de massa é realizada através da análise do escoamento em um orifício, como mostra a Fig. 5.14.

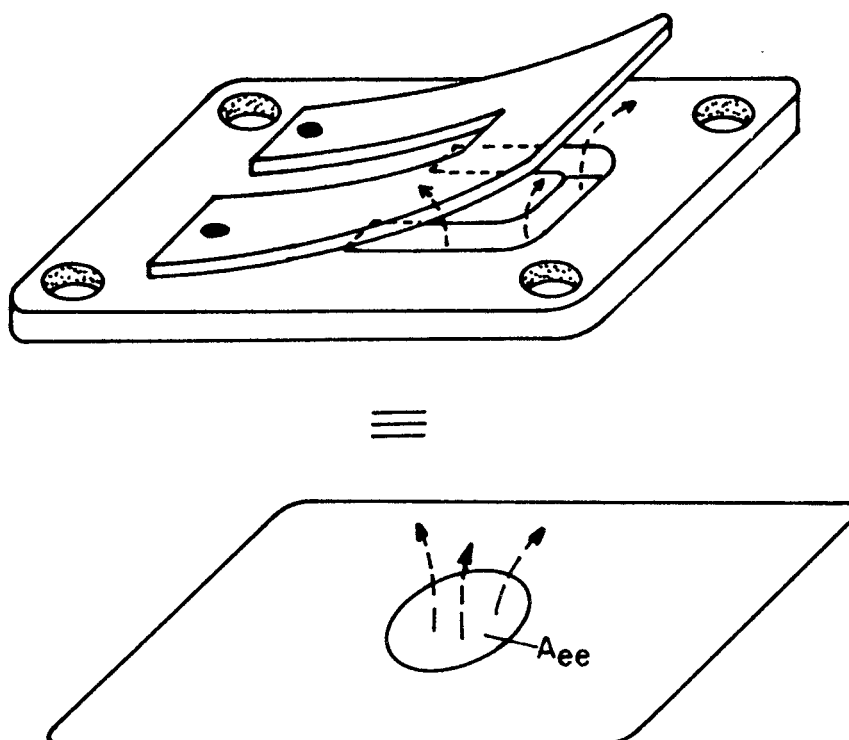


Fig. 5.13 - Sistema de válvula de um compressor de refrigeração e sua área efetiva de escoamento.

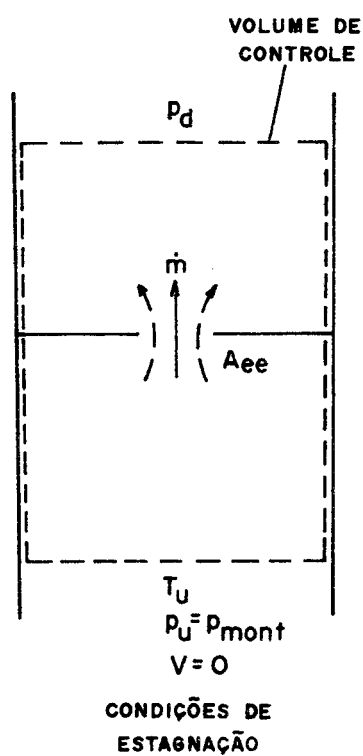


Fig. 5.14 - Escoamento no orifício equivalente.

Considerando as hipóteses de,

- i) escoamento unidimensional e isoentrópico, $n=k$;
- ii) escoamento em regime permanente;
- iii) condições a montante iguais às de estagnação;
- iv) comportamento de gás ideal;

e aplicando a primeira lei da Termodinâmica ao volume de controle mostrado na Fig. 5.14, determina-se [07],

$$\dot{m} = p_u A_{ee} \sqrt{\frac{2k}{(k-1) R T_u}} \sqrt{r^{2/k} - r^{(k+1)/k}} \quad (5.4)$$

onde

\dot{m} - fluxo de massa no orifício;

p_u - pressão a montante do orifício alimentador;

A_{ee} - área efetiva de escoamento;

T_u - Temperatura absoluta a montante do orifício,
igual à temperatura ambiente (293 K);

$R = 286,9 \text{ J/kg K}$;

$k = C_p / C_v$;

$r = p_d / p_u$;

$p_d = p_{atm} = 101300 \text{ Pa}$.

Assim, conhecendo-se o fluxo de massa real através do sistema de válvula pode-se determinar sua área efetiva de escoamento.

As Figs. 5.15 e 5.16 apresentam os resultados obtidos no presente trabalho para a área efetiva de escoamento, adimensionalizada em relação à área do orifício de passagem, em função da excentricidade, afastamento entre palheta e assento e número de Reynolds.

Analisando os resultados apresentados observa-se que a dependência da área efetiva de escoamento com relação à excentricidade é muito pequena. Com exceção do caso em que $Re=3000$ e $s/d=0,03$, onde

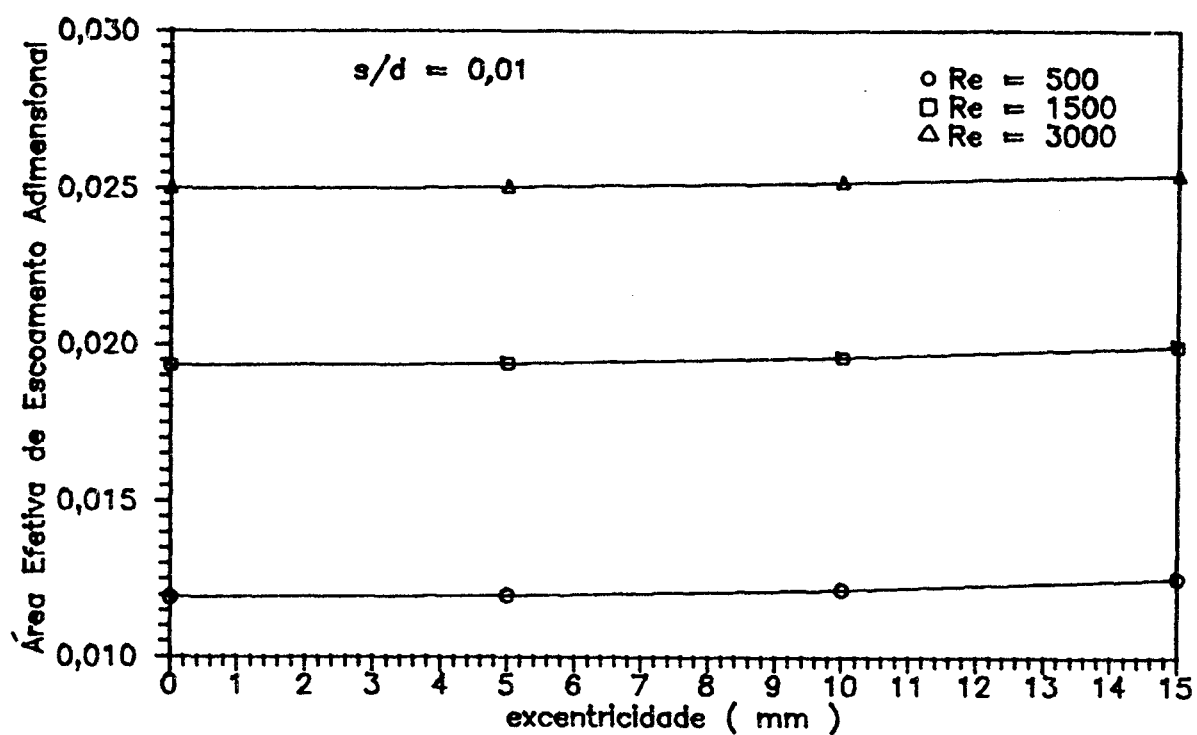


Fig. 5.15 - Área efetiva de escoamento adimensional para $s/d=0,01$.

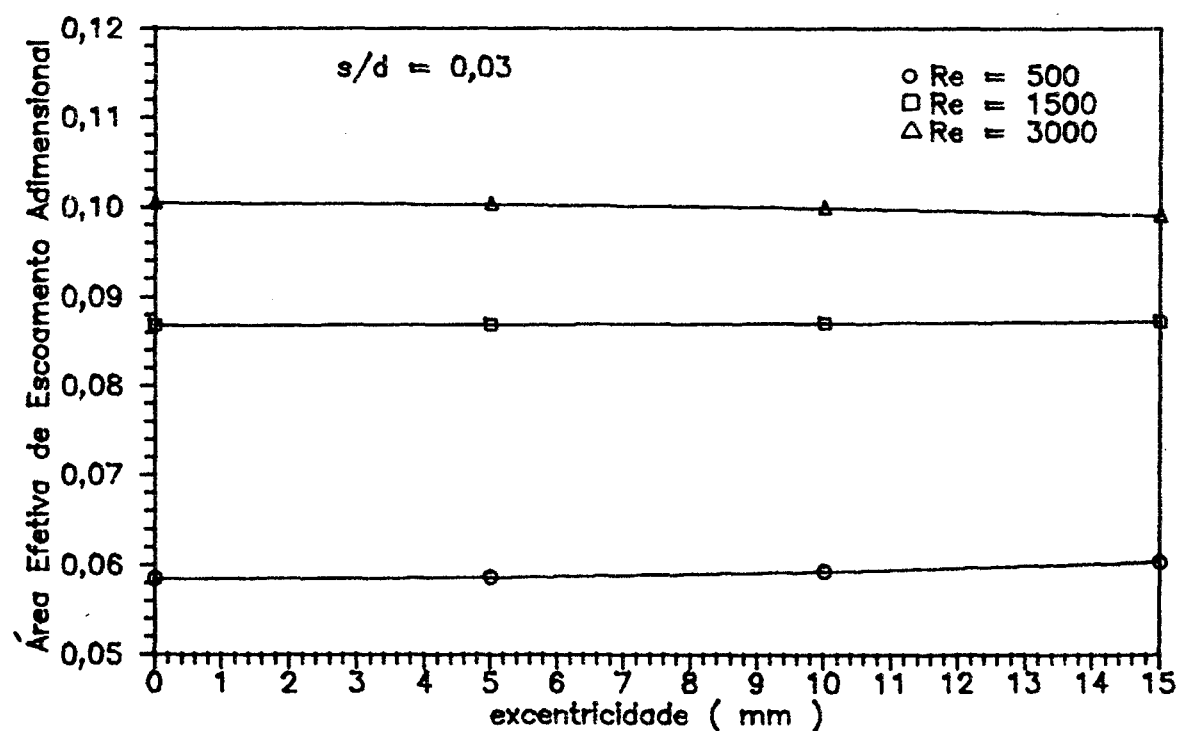


Fig. 5.16 - Área efetiva de escoamento adimensional para $s/d=0,03$.

os efeitos da região de separação são pronunciados, o aumento da excentricidade produz um pequeno crescimento na área efetiva de escoamento. Isto é o mesmo que afirmar que a excentricidade reduz a resistência ao escoamento.

Além disso, para uma determinada excentricidade, observa-se que o aumento do número de Reynolds provoca um crescimento nos valores da área efetiva de escoamento, para os dois afastamentos analisados.

5.6. Campo de velocidade

Apresenta-se, a seguir, algumas características relativas ao campo de velocidades desenvolvido no escoamento.

As Figs. 5.17 a 5.20 mostram o desenvolvimento do perfil de velocidade w ao longo do orifício de passagem, para as posições $\psi=0$ e $\psi=180$. A visualização da coordenada ψ pode ser feita na Fig. 4.16. As posições referentes a cada perfil podem ser visualizadas no esquema da Fig. 5.21.

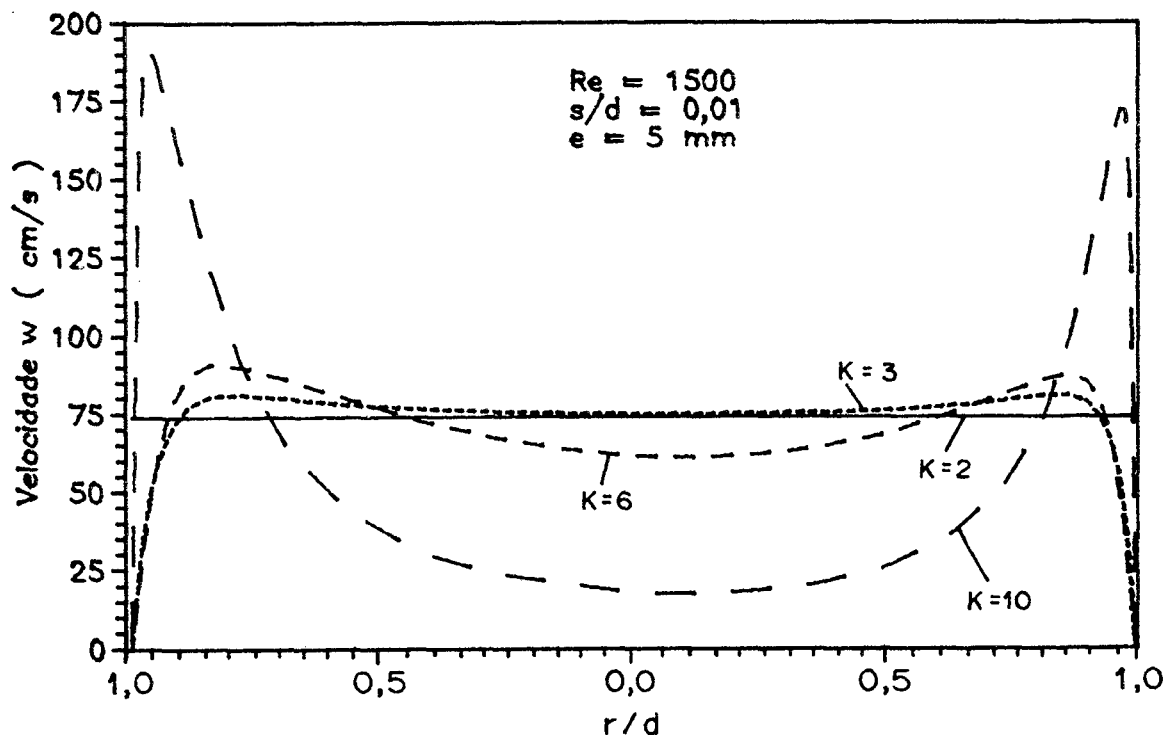


Fig. 5.17 - Perfis de velocidade w no orifício para $Re=1500$, $s/d=0,01$ e $e=5$ mm.

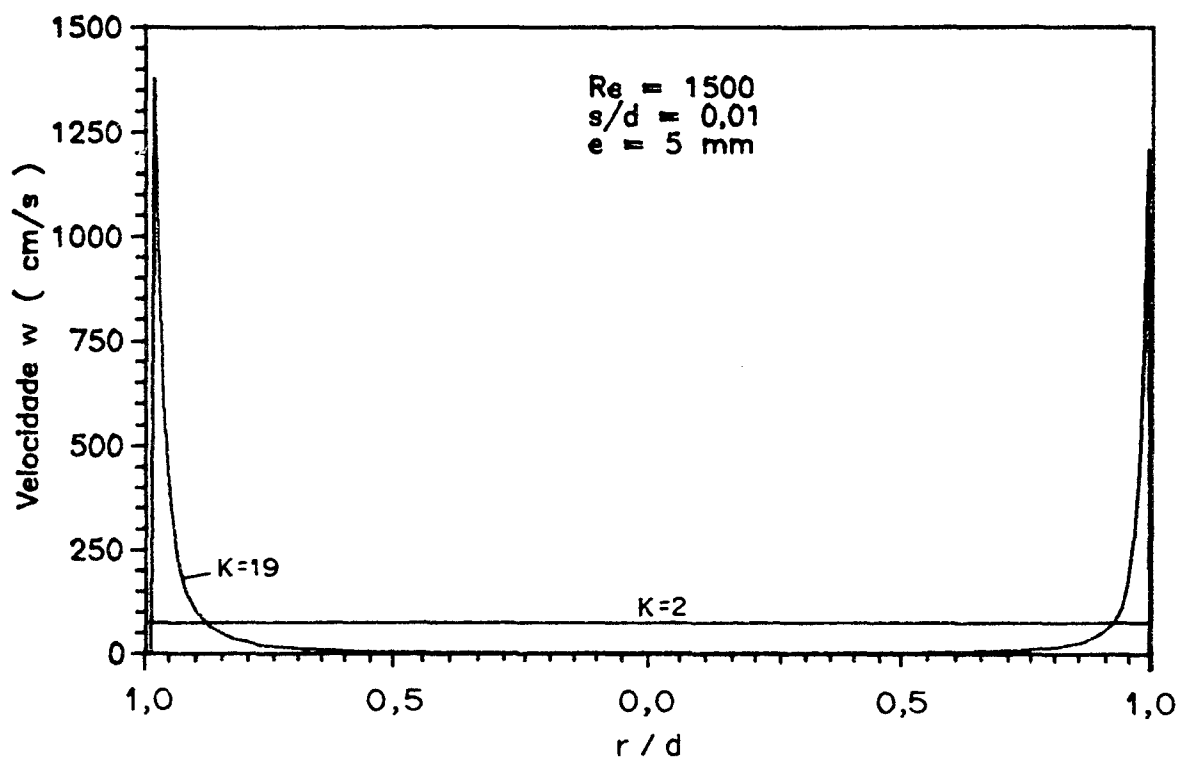


Fig. 5.18 - Perfis de velocidade w no orifício para $Re=1500$, $s/d=0,01$, $e=5 \text{ mm}$.

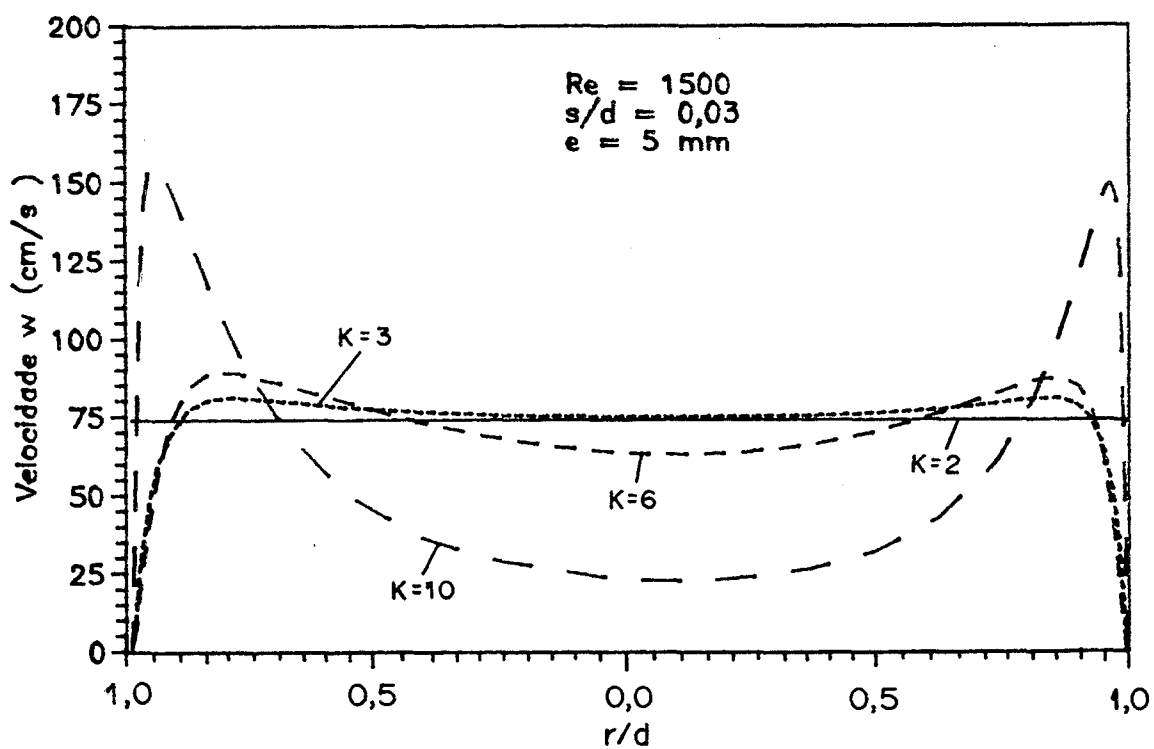


Fig. 5.19 - Perfis de velocidade w no orifício para $Re=1500$, $s/d=0,03$ e $e=5 \text{ mm}$.

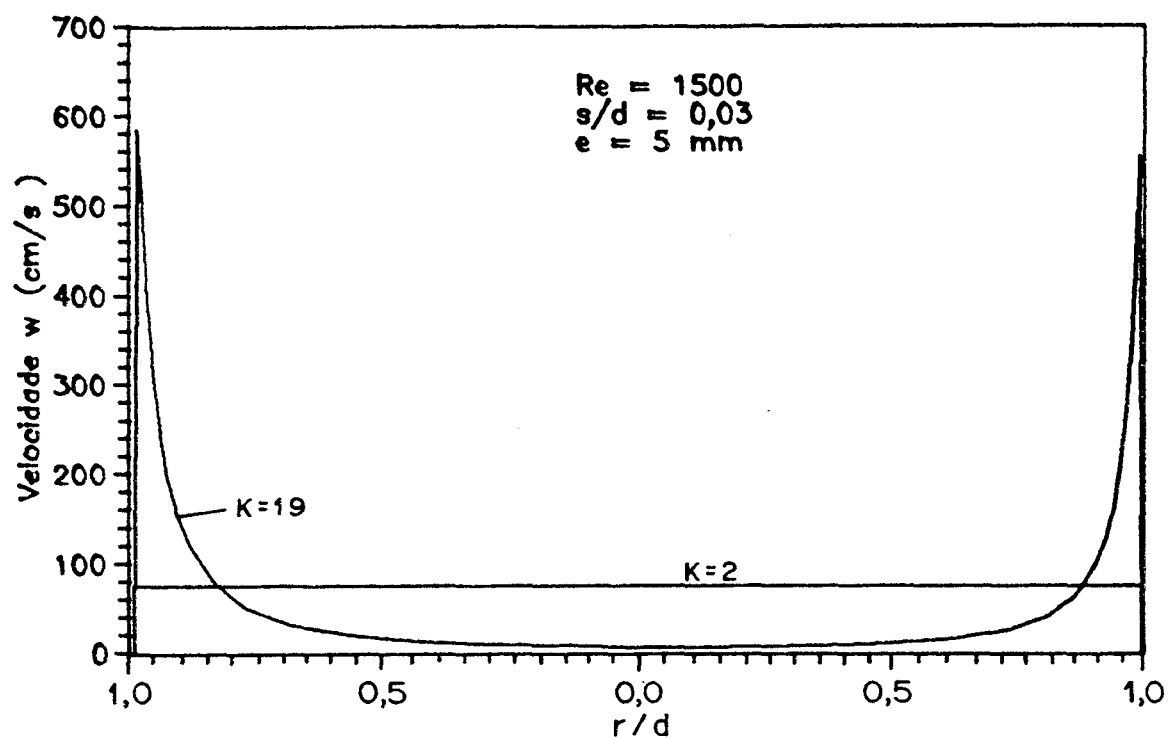


Fig. 5.20 - Perfis de velocidade w no orifício para $Re=1500$, $s/d=0,03$, $e=5 \text{ mm}$.

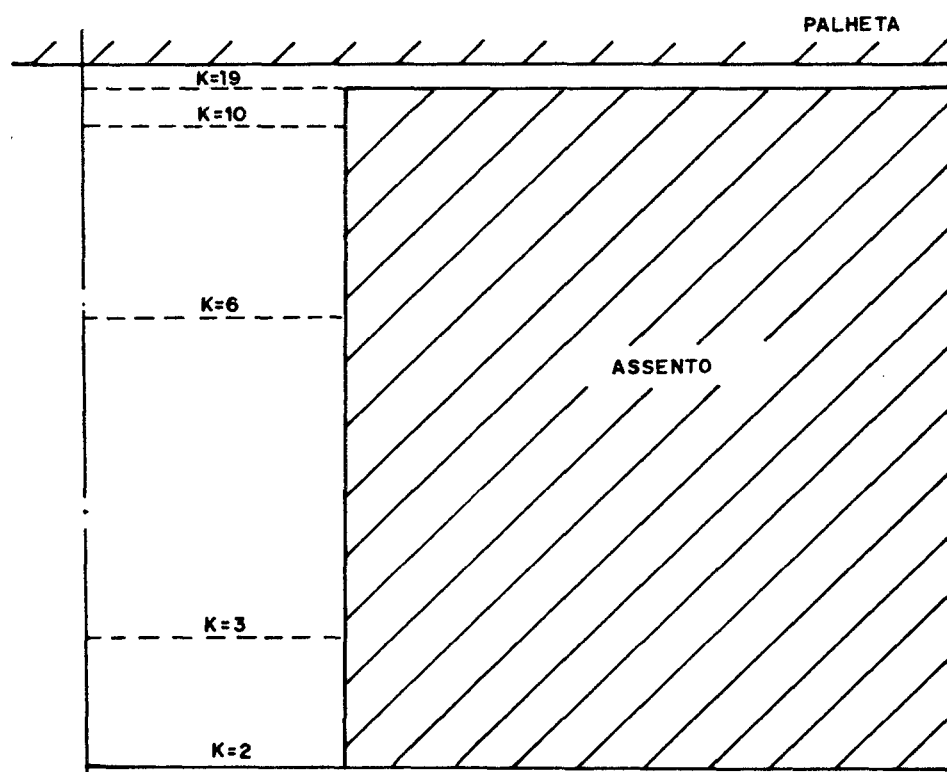


Fig. 5.21. Posições referentes aos perfis de velocidade w no orifício de passagem para as posições de $\psi=0$ e $\psi=180^\circ$.

No desenvolvimento do perfil de velocidade w na região do orifício de passagem nota-se, claramente, a natureza elíptica do escoamento. O perfil de velocidade se deforma acentuadamente desde o início do escoamento em função da presença da palheta. É importante salientar que até mesmo a distribuição não uniforme da vazão circunferencial é sentida pelo escoamento na região do orifício. Nota-se que o perfil de velocidade w não é simétrico, prevendo, justamente, esta característica do escoamento.

As Figs. 5.22 a 5.25 mostram o desenvolvimento do perfil de velocidade v ao longo do difusor e a Fig. 5.26 apresenta um esquema das posições referentes a cada perfil.

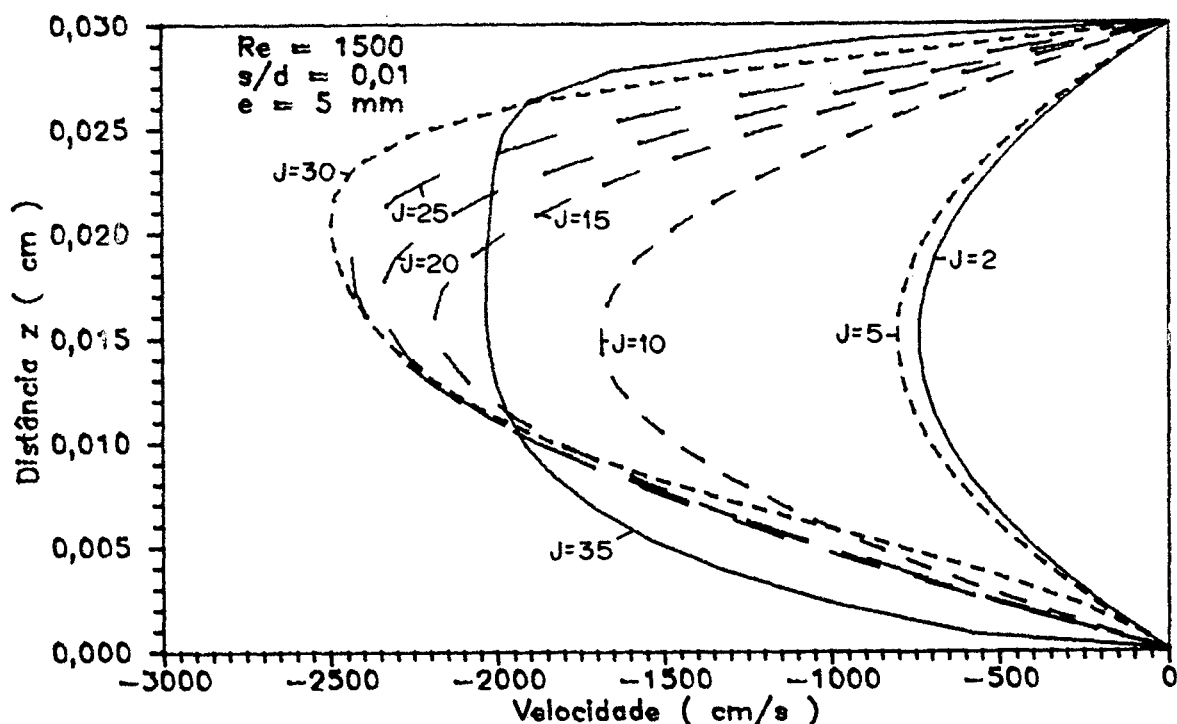


Fig. 5.22 - Perfis de velocidade v no difusor para $Re=1500$, $s/d=0,01$, $\psi=0$ e $e=5 \text{ mm}$.

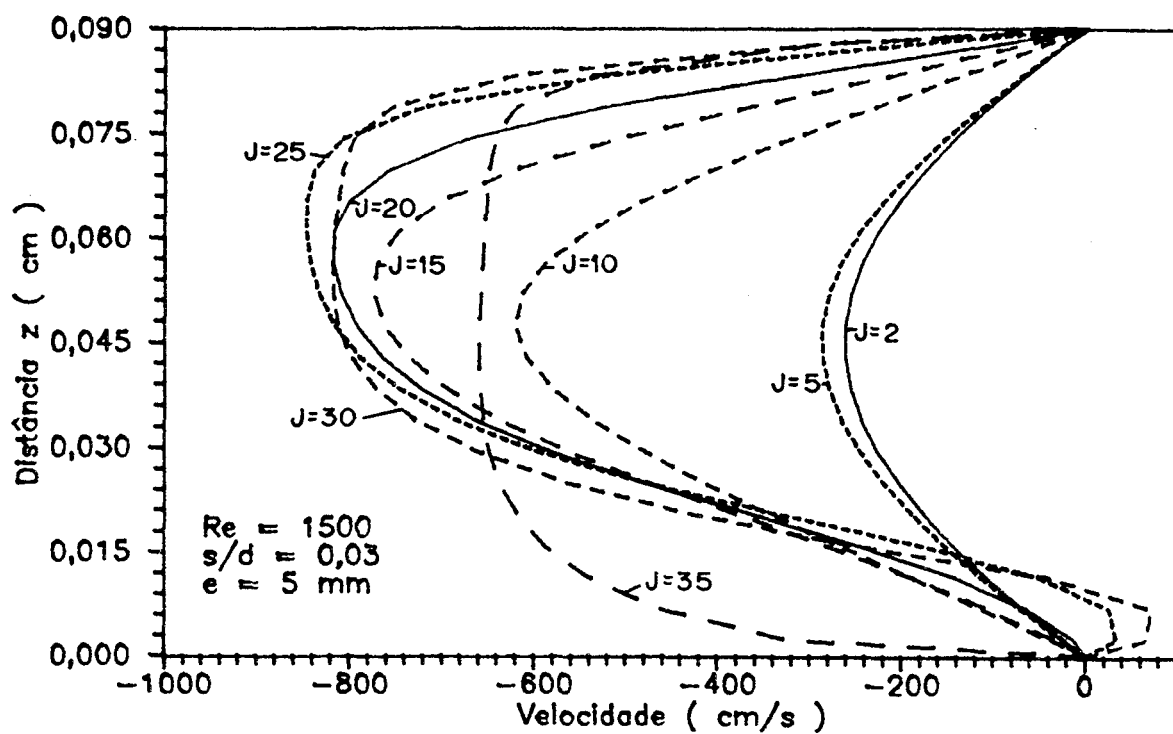


Fig. 5.23 - Perfis de velocidade v no difusor para $Re=1500$, $s/d=0,03$, $\psi=0$ e $e=5 \text{ mm}$.

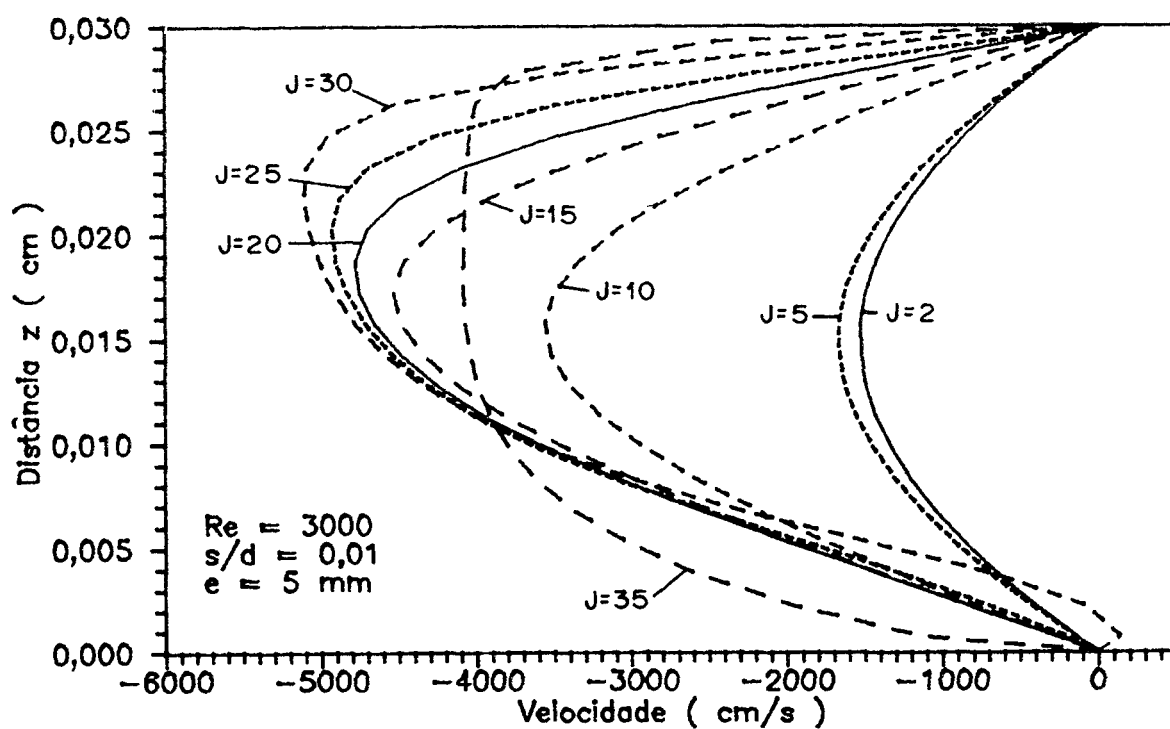


Fig. 5.24 - Perfis de velocidade v no difusor para $Re=3000$, $s/d=0,01$, $\psi=0$ e $e=5 \text{ mm}$.

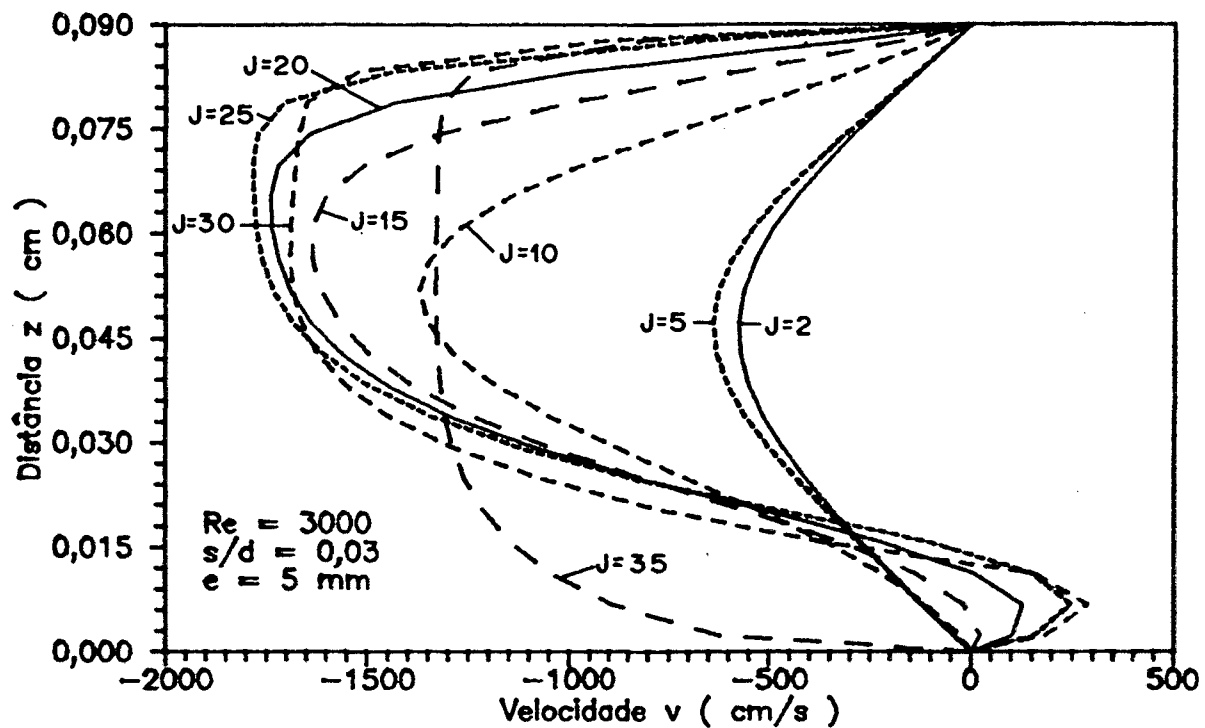


Fig. 5.25 - Perfis de velocidade v no difusor para $Re=3000$, $s/d=0,03$, $\psi=0$ e $e=5$ mm.

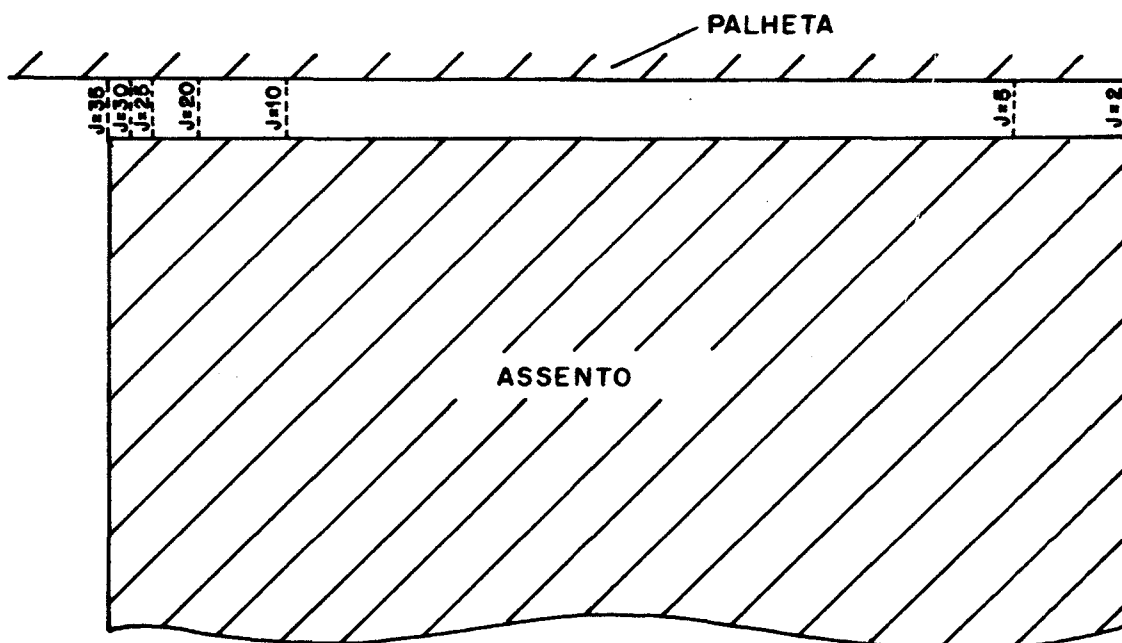


Fig. 5.26 - Posições referentes aos perfis de velocidade v no difusor para $\psi=0$ ($I=2$).

Nas figuras anteriores observam-se duas características importantes do escoamento. Na entrada do difusor o perfil de velocidade v é bastante achatado, principalmente para $s/d=0,03$, e vai se desenvolvendo na direção da saída do difusor. A partir de um certo ponto a forma parabólica do perfil não mais se altera, de maneira que ao atingir a saída o perfil de velocidade está plenamente desenvolvido. A diferença entre os perfis de velocidade v para $J=2$ e $J=5$, por exemplo, é devido à redução da velocidade média do fluido, causada pelo aumento da área da secção transversal.

A outra característica, relativa à região de separação do escoamento, pode ser comprovada pela existência da inversão de sinal no perfil de velocidade, sobretudo para os maiores números de Reynolds e afastamentos. Isto, mais uma vez, comprova a existência de grandes bolhas de separação nessas condições.

Observa-se, além disso, que para $J=35$, região de entrada do fluido no difusor, o perfil de velocidade é muito próximo do perfil uniforme, e se desenvolve rapidamente para o perfil de velocidade da posição $J=30$ devido à separação que ocorre junto à parede do assento e à formação da camada limite na parede da palheta, provocando a aceleração do fluido na região central do difusor.

A visualização da distribuição circunferencial de vazão no difusor pode ser analisada nos gráficos apresentados nas Figs. 5.27 e 5.28, que mostram a velocidade média do escoamento nas secções transversais de entrada e saída do difusor em função da posição circunferencial ψ . A velocidade média na secção transversal do difusor, V_m , para uma posição η , é definida pela equação,

$$V_m = \frac{1}{s} \int_0^s v_\psi \, dz \quad (5.5)$$

onde s - afastamento entre palheta e assento;

v_ψ - velocidade v em uma determinada posição ψ .

Devido à diferença de resistência ao escoamento, imposta pela região de recobrimento circunferencial não uniforme, surge uma distribuição de vazão circunferencial, igualmente, não uniforme. Observa-se que a velocidade média do escoamento no difusor cresce de $\psi=0$ até atingir seu valor máximo em $\psi=180^\circ$. Uma maior parcela do escoamento procura a região de menor resistência, ou seja, a região de menor recobrimento ($\psi=180^\circ$). Este fenômeno é tanto mais acentuado quanto maior for o valor da excentricidade, pois a região de recobrimento torna-se cada vez menos uniforme.

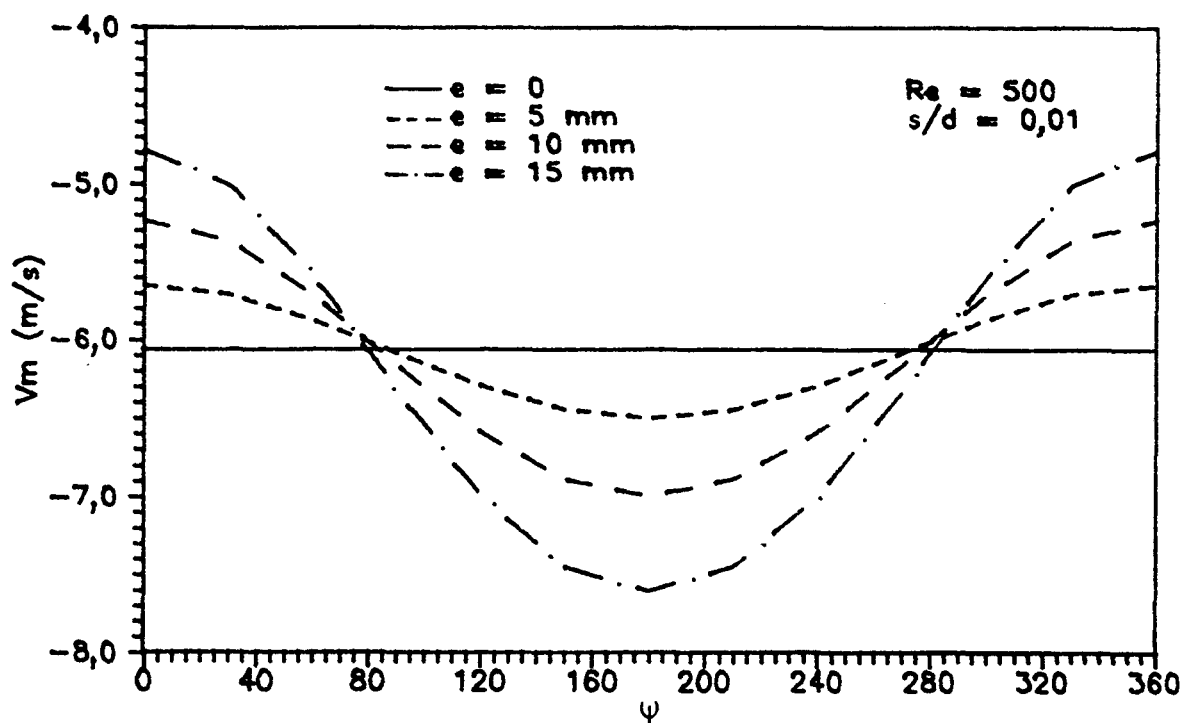


Fig. 5.27 - Distribuição circunferencial da velocidade média na entrada do difusor para $Re=500$ e $s/d=0,01$.

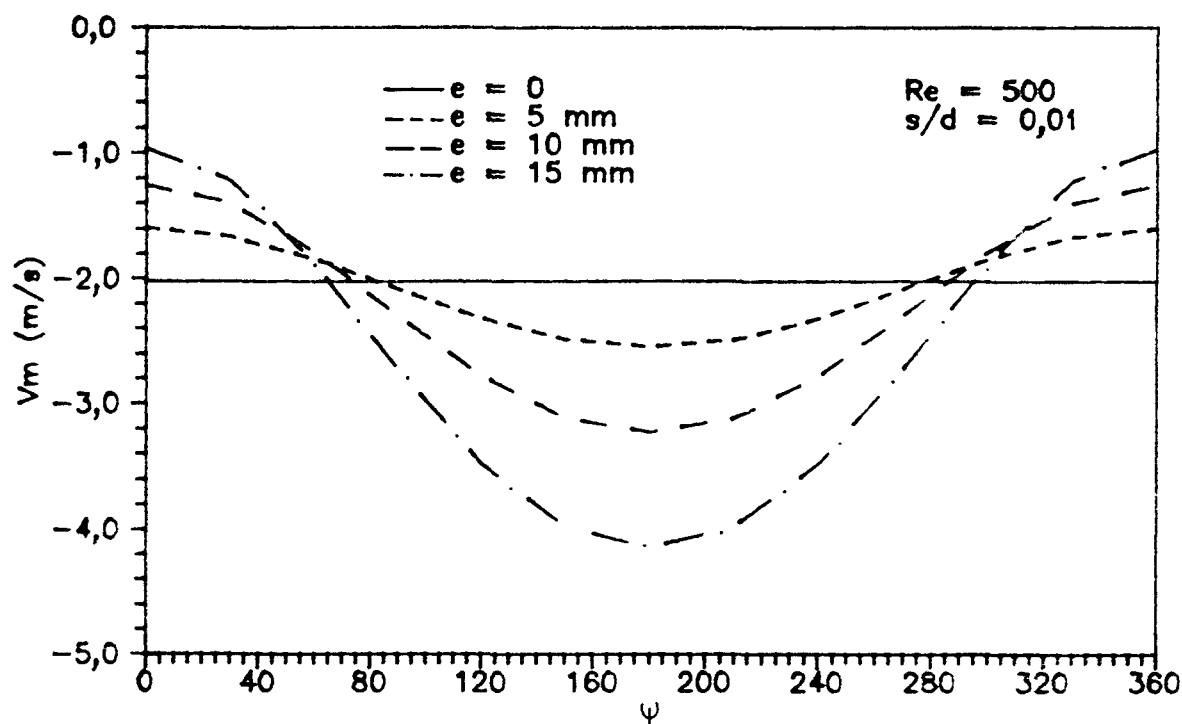


Fig. 5.28 - Distribuição circunferencial da velocidade média na saída do difusor para $Re=500$ e $s/d=0,01$.

Um outro parâmetro importante para o melhor entendimento do escoamento na região do difusor é o comprimento de separação, que define a região de recirculação do fluido. Este fenômeno ocorre devido à atuação de um gradiente de pressão adverso no sentido do escoamento e, também, devido à curvatura que o fluido é obrigado a efetuar para entrar na região do difusor. As Figs. 5.29 a 5.32 apresentam o comprimento de separação, ΔS_η , em função da posição circunferencial, ψ , para várias configurações da geometria e números de Reynolds do escoamento. As figs. 5.33 e 5.34 mostram o comprimento de separação em função do número de Reynolds.

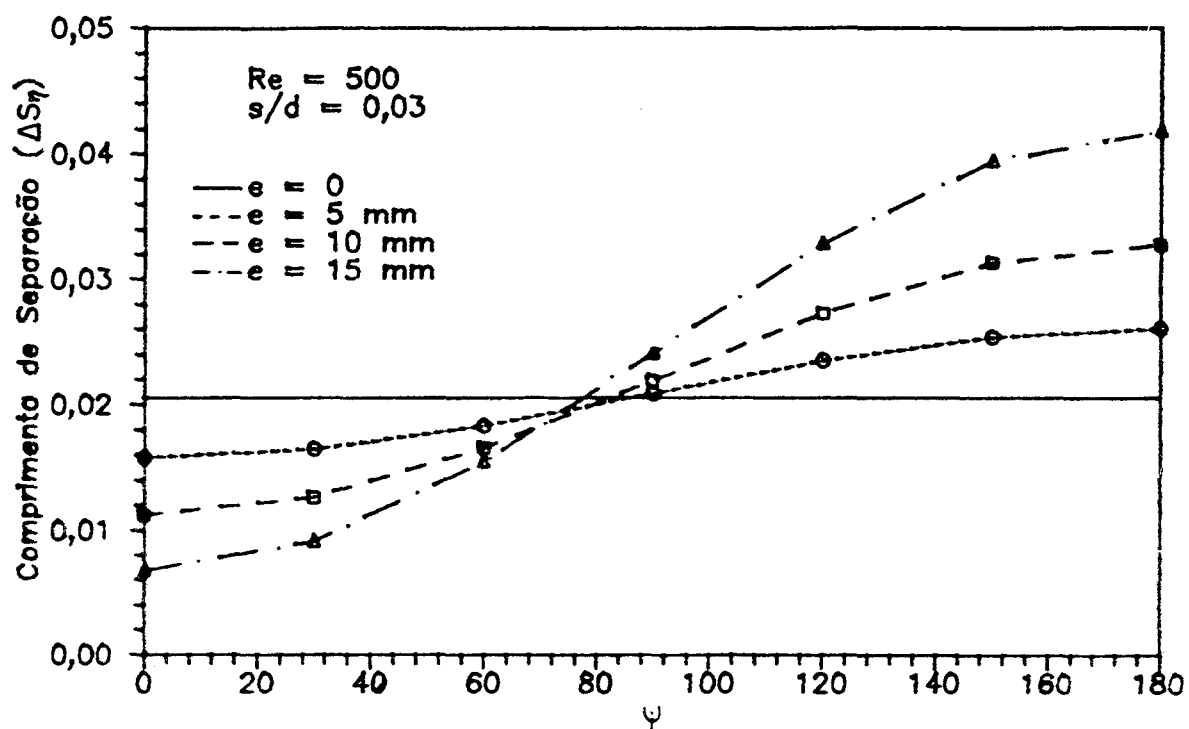


Fig. 5.29 - Comprimento de separação para $Re=500$ e $s/d=0,03$.

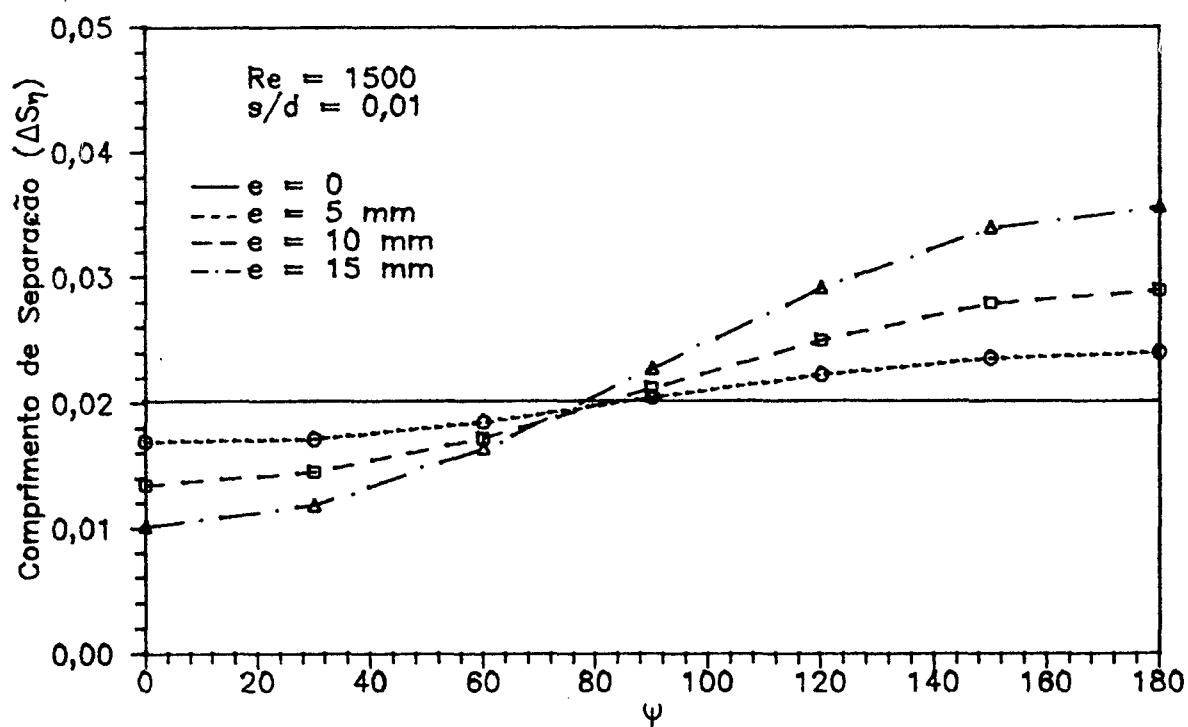


Fig. 5.30 - Comprimento de separação para $Re=1500$ e $s/d=0,01$.

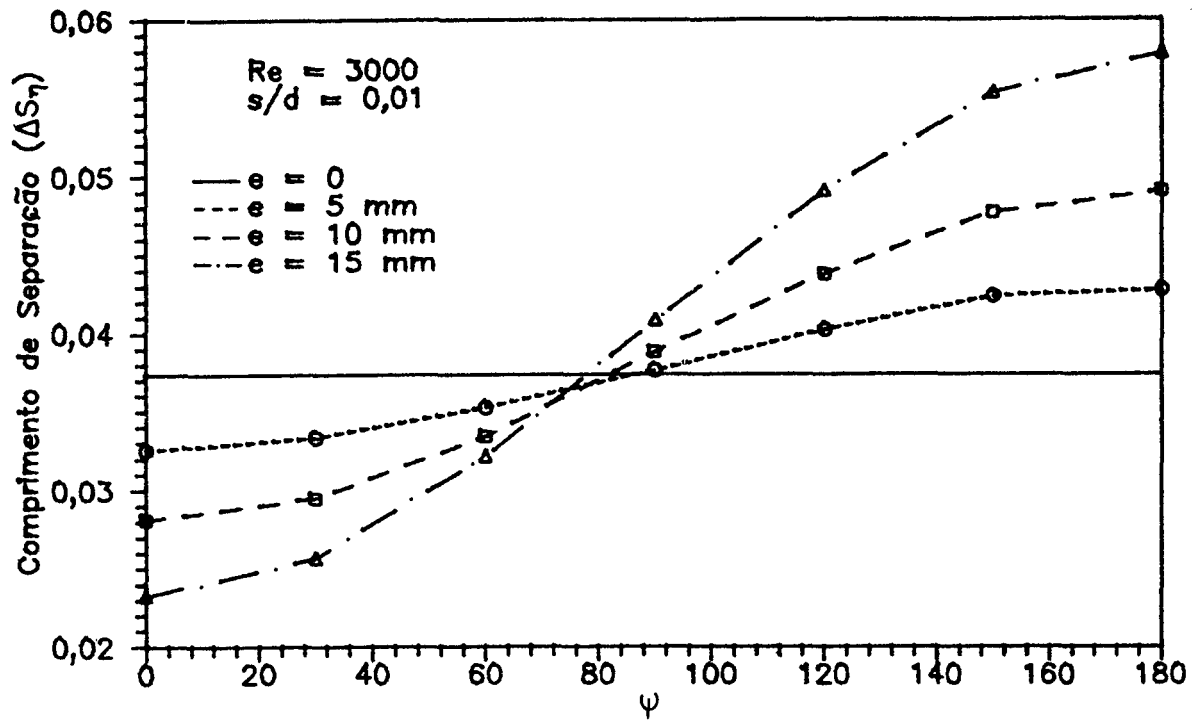


Fig. 5.31 - Comprimento de separação para $Re=3000$ e $s/d=0,01$.

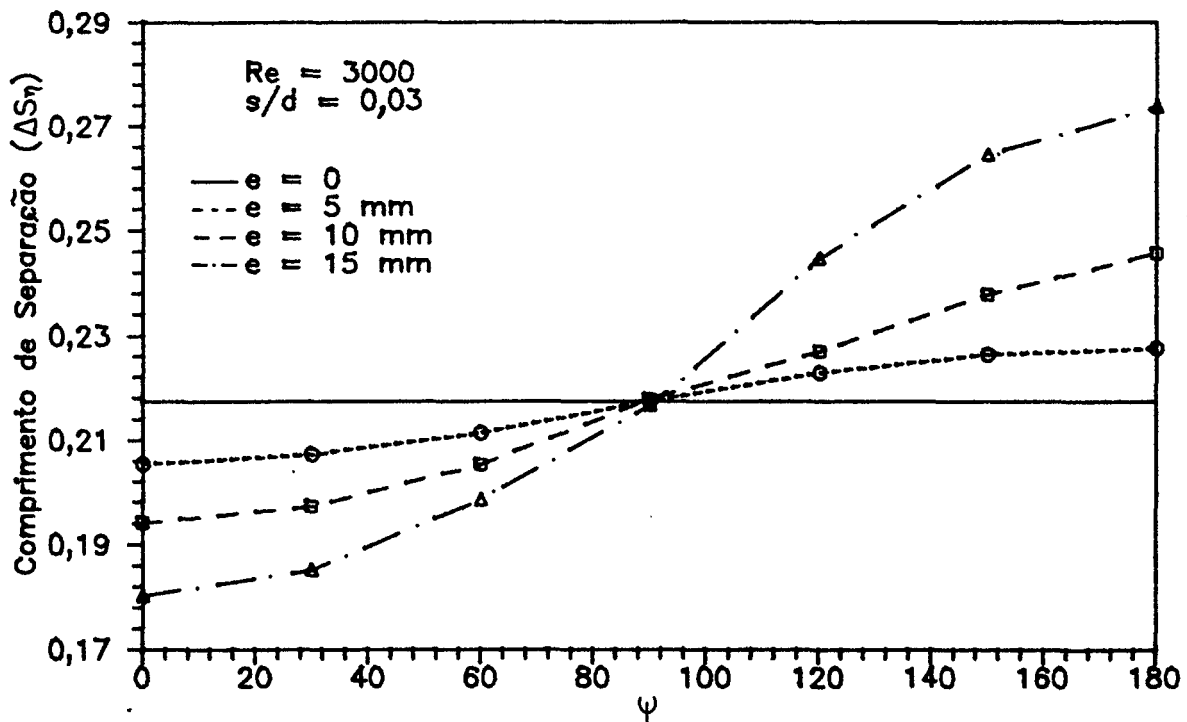


Fig. 5.32 - Comprimento de separação para $Re=3000$ e $s/d=0,03$.

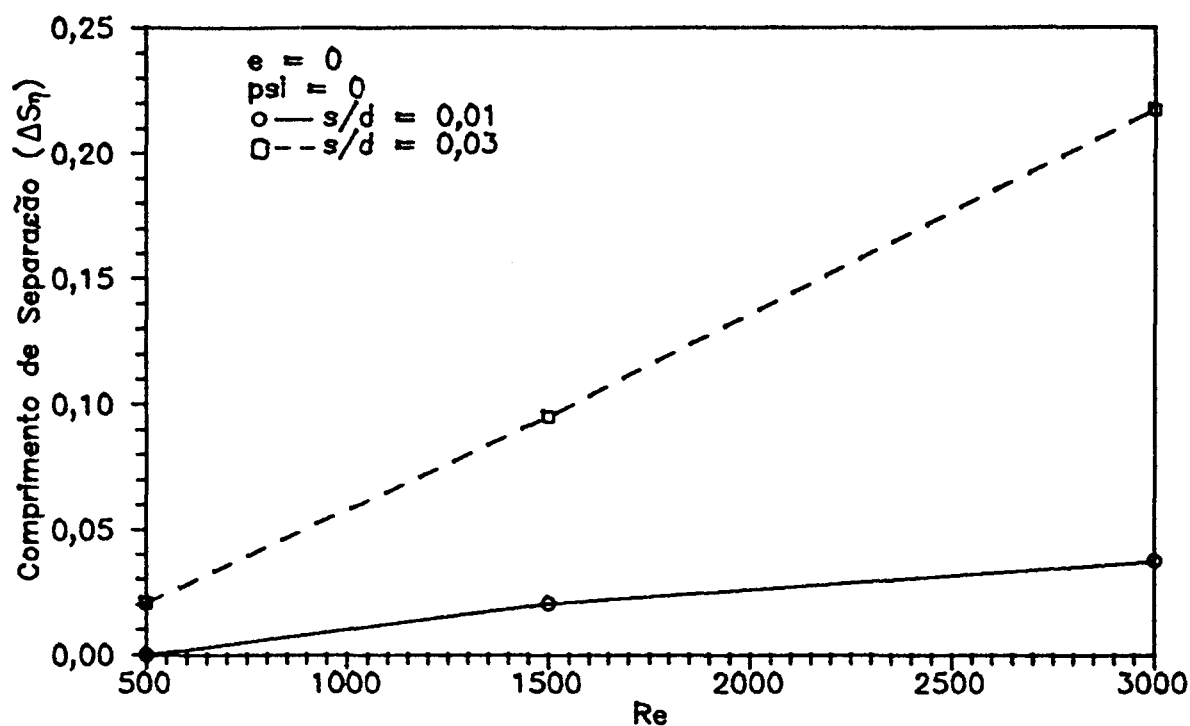


Fig. 5.33 - Comprimento de separação em função do número de Reynolds para $e=0$.

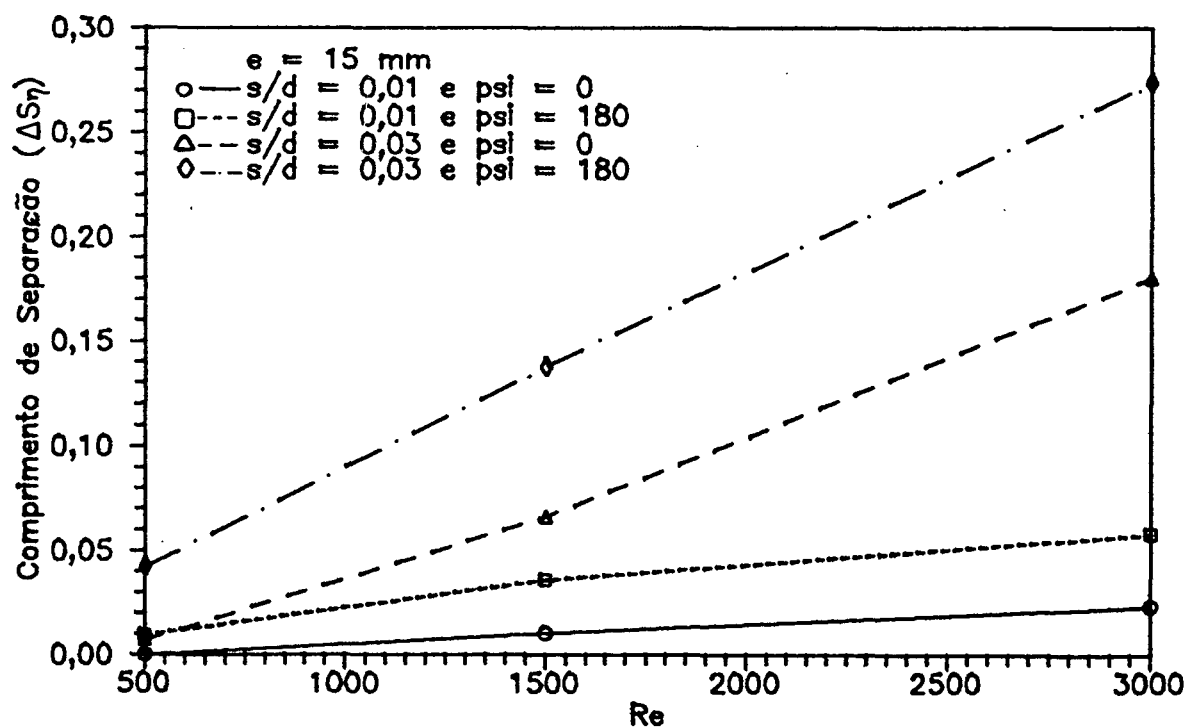


Fig. 5.34 - Comprimento de separação em função do número de Reynolds para $e = 15$ mm.

Analisando os resultados anteriores, nota-se que o comprimento de separação cresce da mesma maneira que a velocidade circunferencial média, ou seja, para $\psi=0$ tem-se as menores regiões de recirculação de fluido enquanto que as maiores regiões localizam-se em $\psi=180^0$. Isto ocorre, pois quanto maior for a velocidade do escoamento, maior será sua inércia para vencer o gradiente de pressão adverso e, portanto, o escoamento retarda o seu reatamento à parede do difusor.

Observa-se, também, que este fenômeno é mais acentuado para os maiores valores de afastamento e número de Reynolds. As Figs. 5.33 e 5.34 mostram que, além da região de recirculação de fluido ser maior para $s/d=0,03$, seu crescimento com o número de Reynolds é muito mais acentuado.

5.7. Campo de pressão

Devido à variação da pressão com a coordenada ψ , a apresentação do perfil radial de pressão não é suficiente para a completa visualização do campo de pressão. Com o objetivo de melhorar o entendimento do campo de pressão foram preparadas as Figs. 5.35 a 5.52 que mostram o campo adimensional de pressão sobre as superfícies da palheta e assento para algumas configurações do escoamento.

Observando-se os resultados, verifica-se que existe uma diferença entre os campos de pressão sobre a palheta e assento na região de entrada do difusor, sobretudo para os maiores números de Reynolds e afastamentos. Isto é causado pelo efeito de curvatura do escoamento, ou seja, a componente de força centrípeta atua no sentido de aumentar a pressão sobre a palheta.

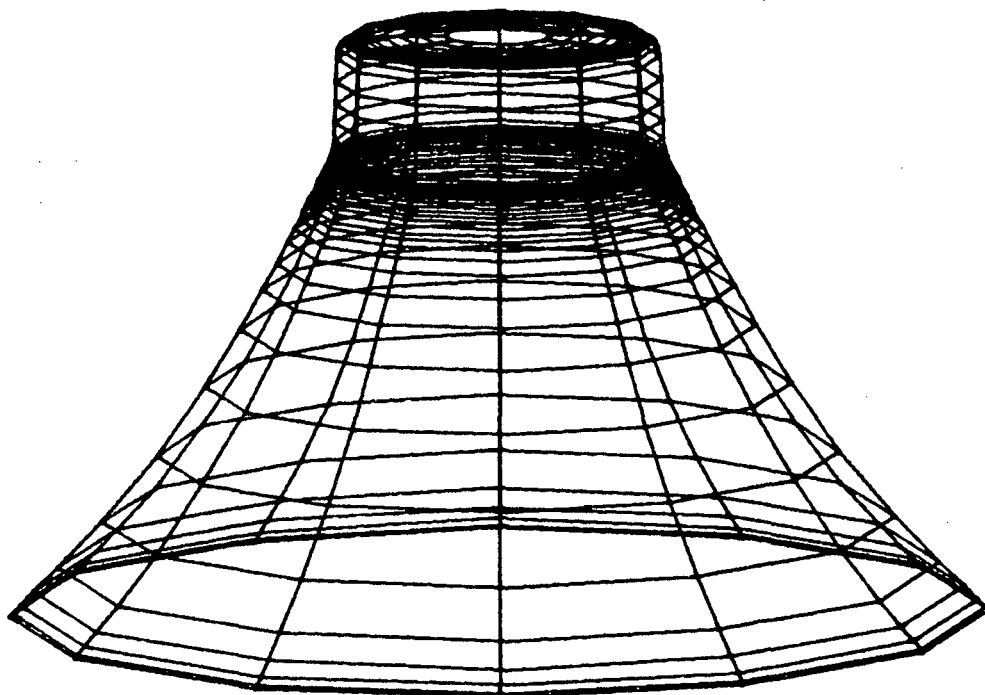


Fig. 5.35 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=500$,
 $s/d=0,01$ e $e=0$.

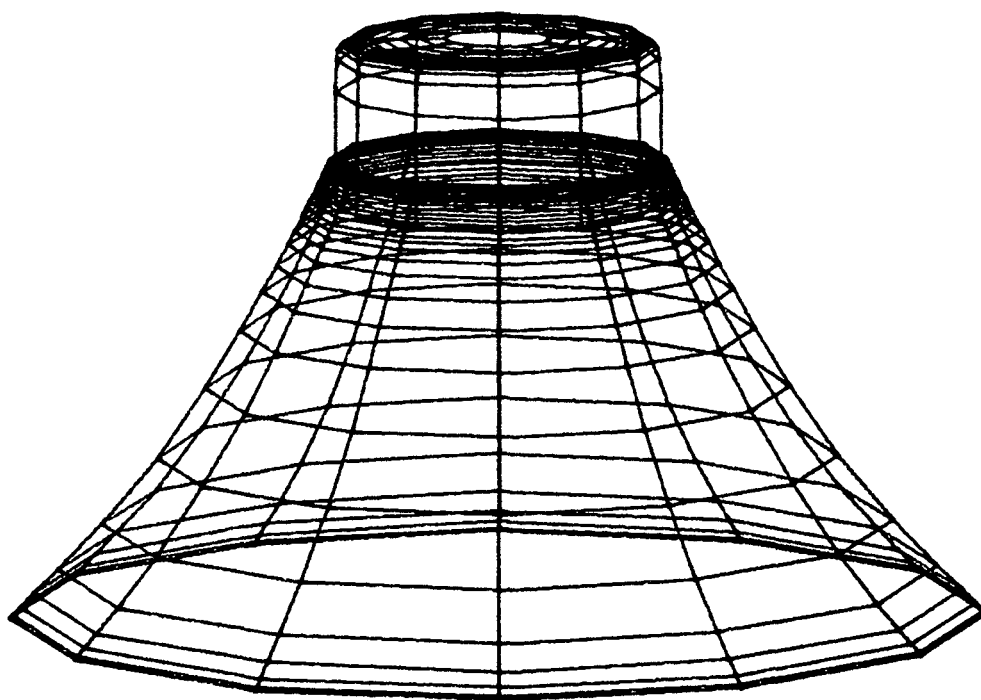


Fig. 5.36 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=500$,
 $s/d=0,01$ e $e=0$.

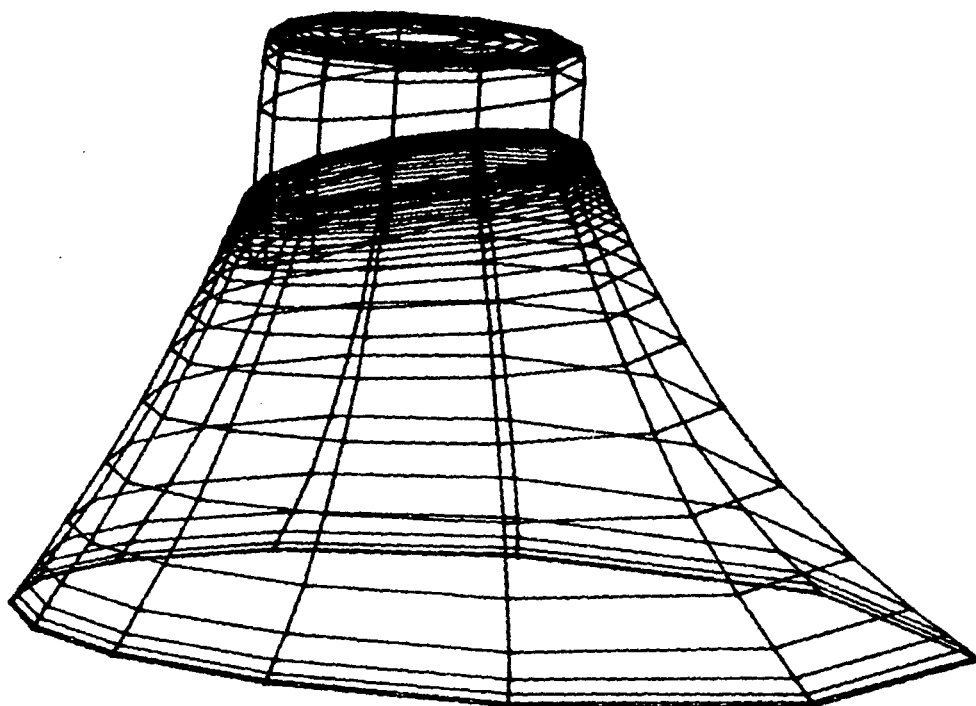


Fig. 5.37 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=500$, $s/d=0,01$ e $e=10$ mm.

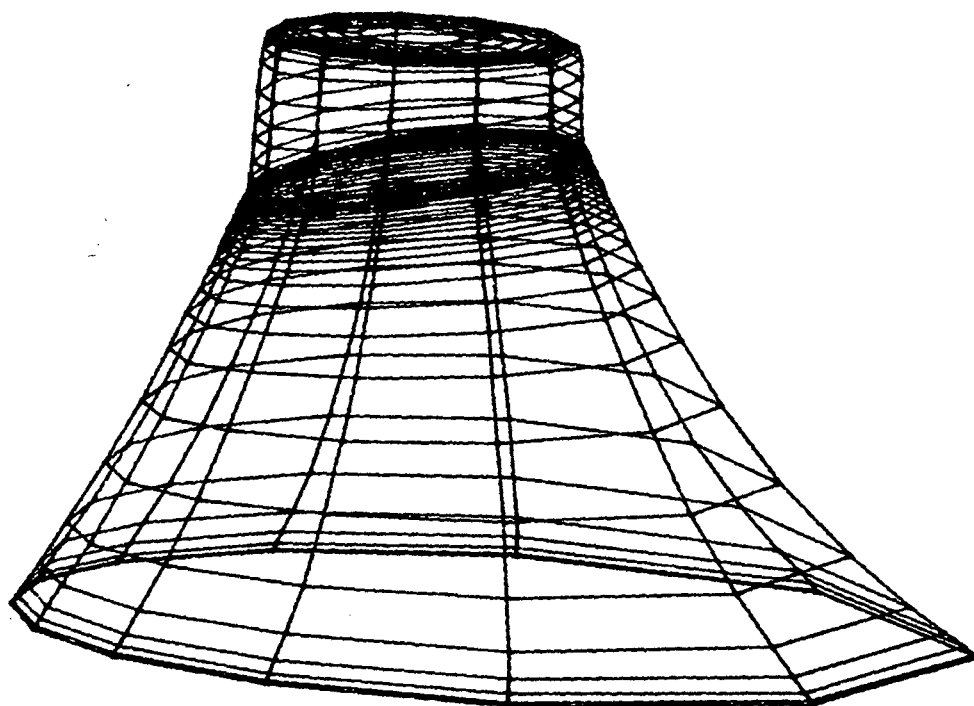


Fig. 5.38 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=500$, $s/d=0,01$ e $e=10$ mm.

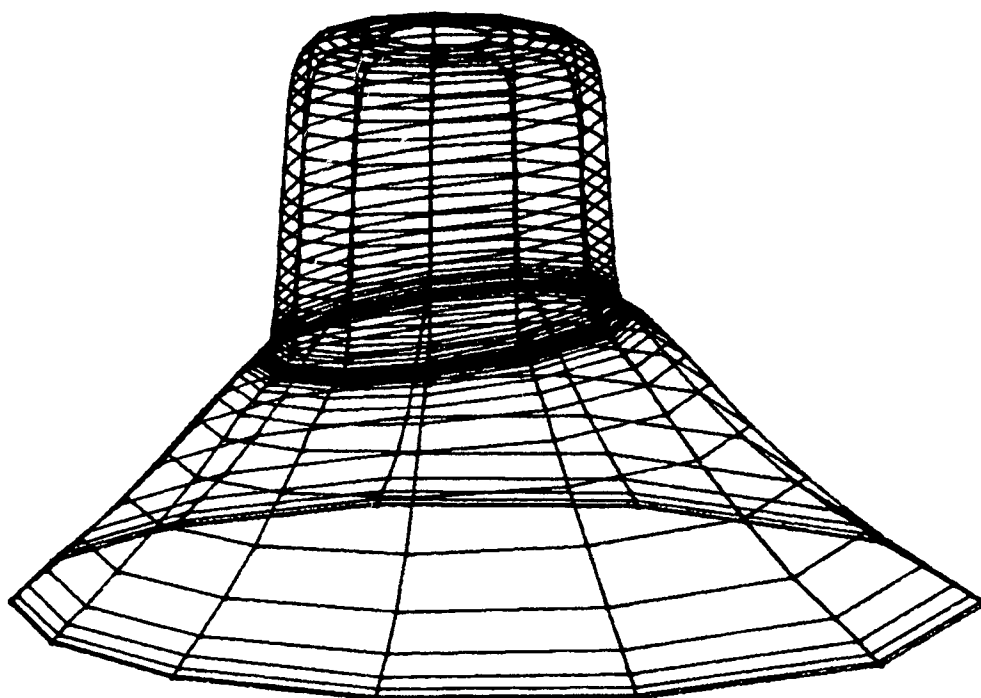


Fig. 5.39 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=500$,
 $s/d=0,03$ e $e=5$ mm.

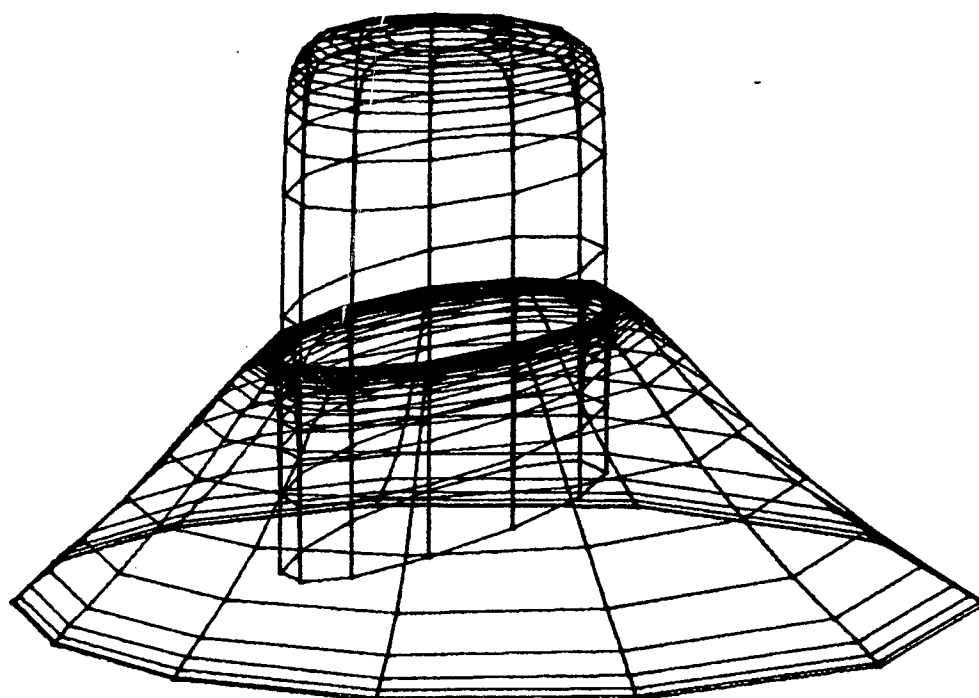


Fig. 5.40 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=500$,
 $s/d=0,03$ e $e=5$ mm.

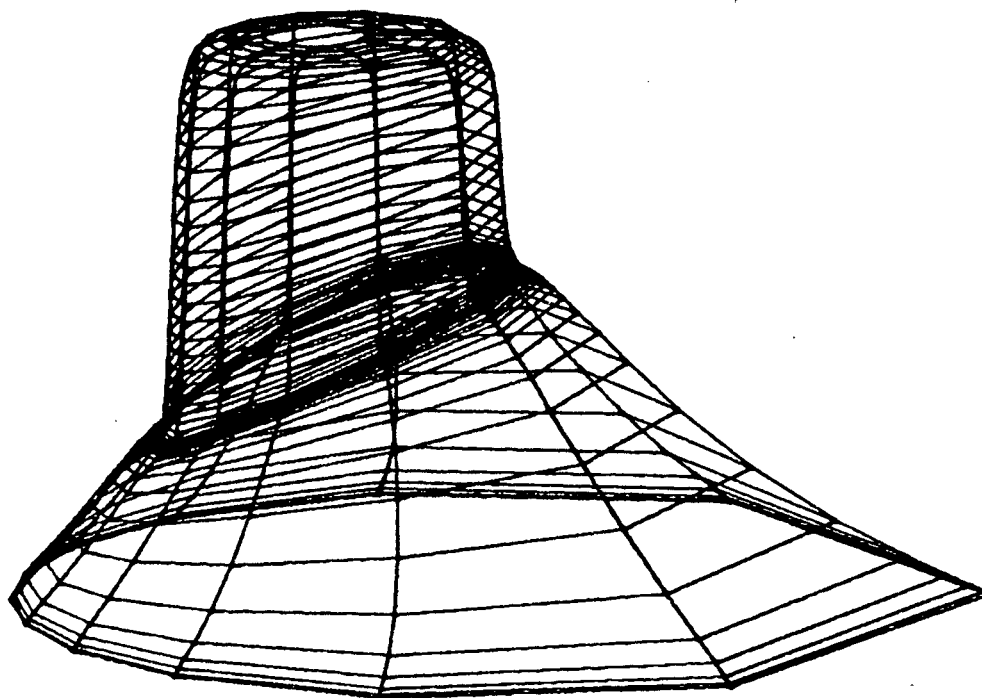


Fig. 5.41 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=500$,
 $s/d=0,03$ e $e=15$ mm.

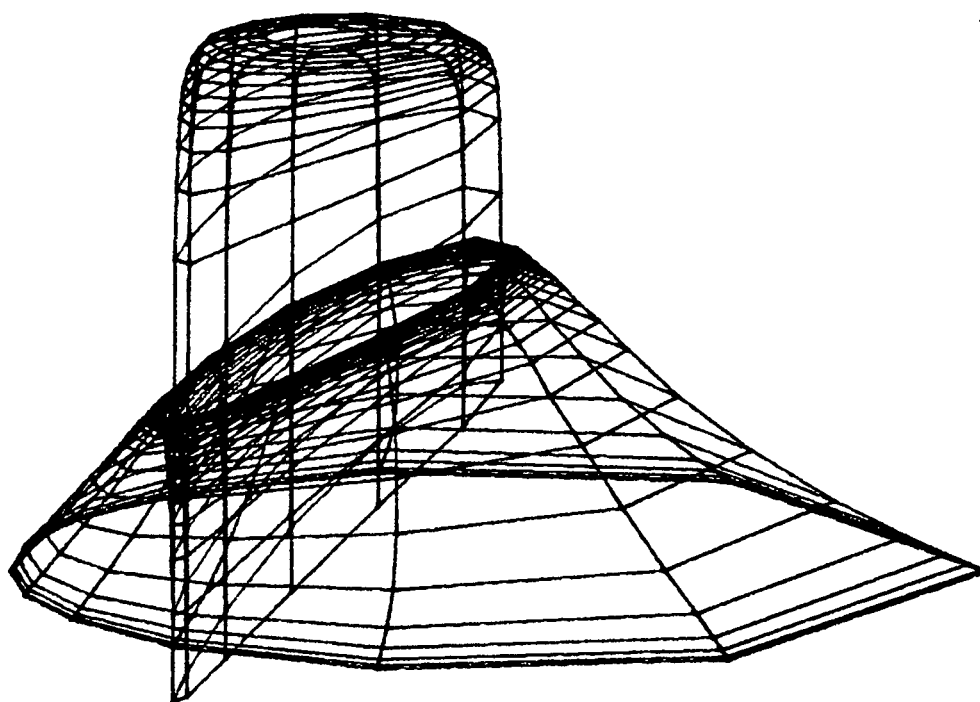


Fig. 5.42 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=500$,
 $s/d=0,03$ e $e=15$ mm.

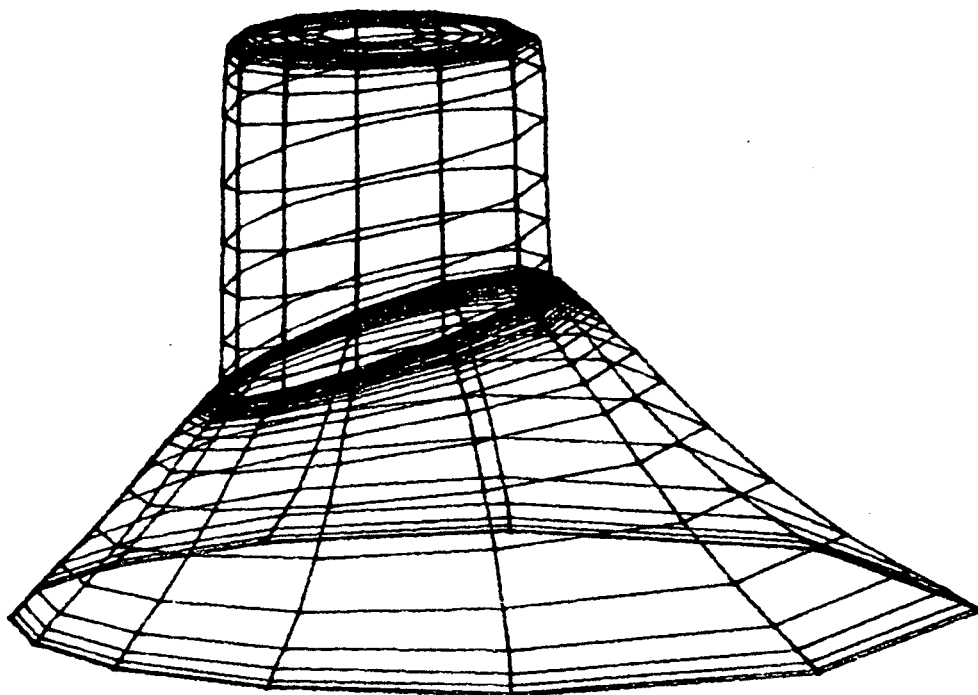


Fig. 5.43 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=1500$,
 $s/d=0,01$ e $e=10$ mm.

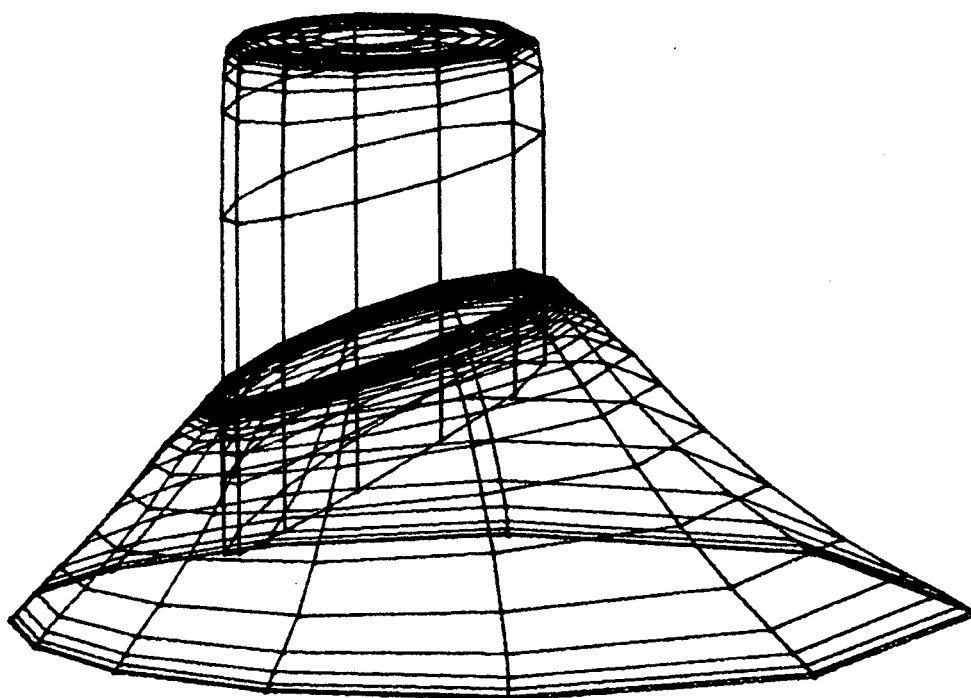


Fig. 5.44 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=1500$,
 $s/d=0,01$ e $e=10$ mm.

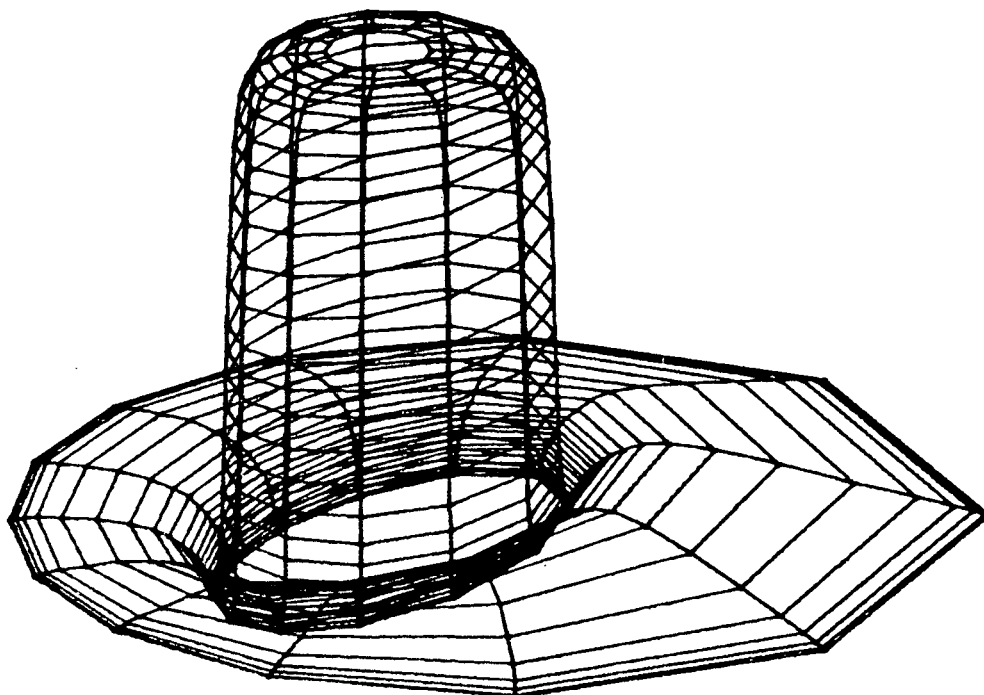


Fig. 5.45 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=1500$,
 $s/d=0,03$ e $e=10$ mm.

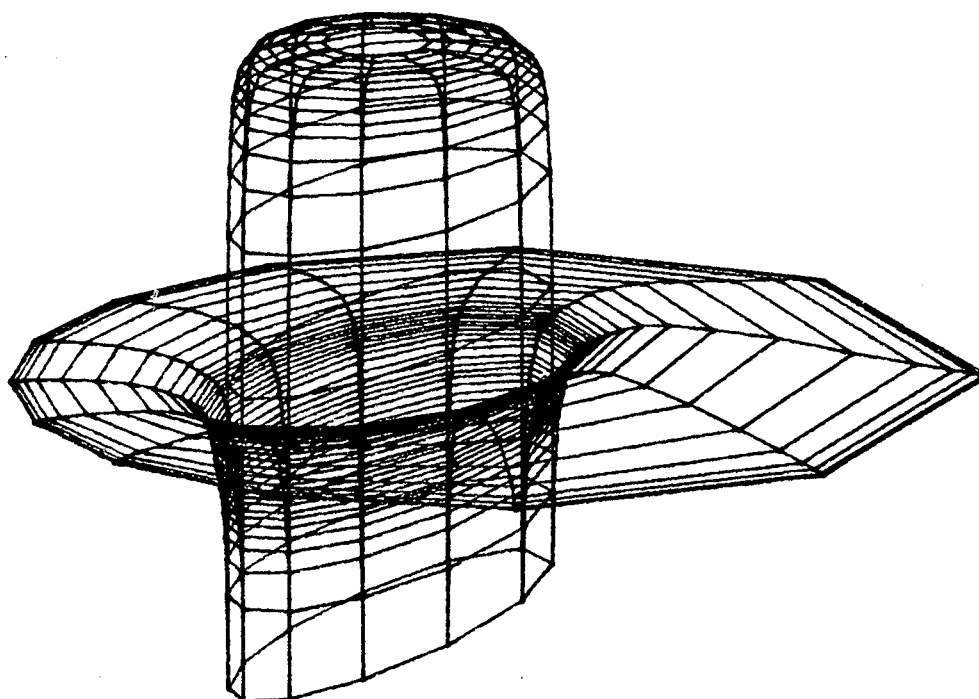


Fig. 5.46 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=1500$,
 $s/d=0,03$ e $e=10$ mm.

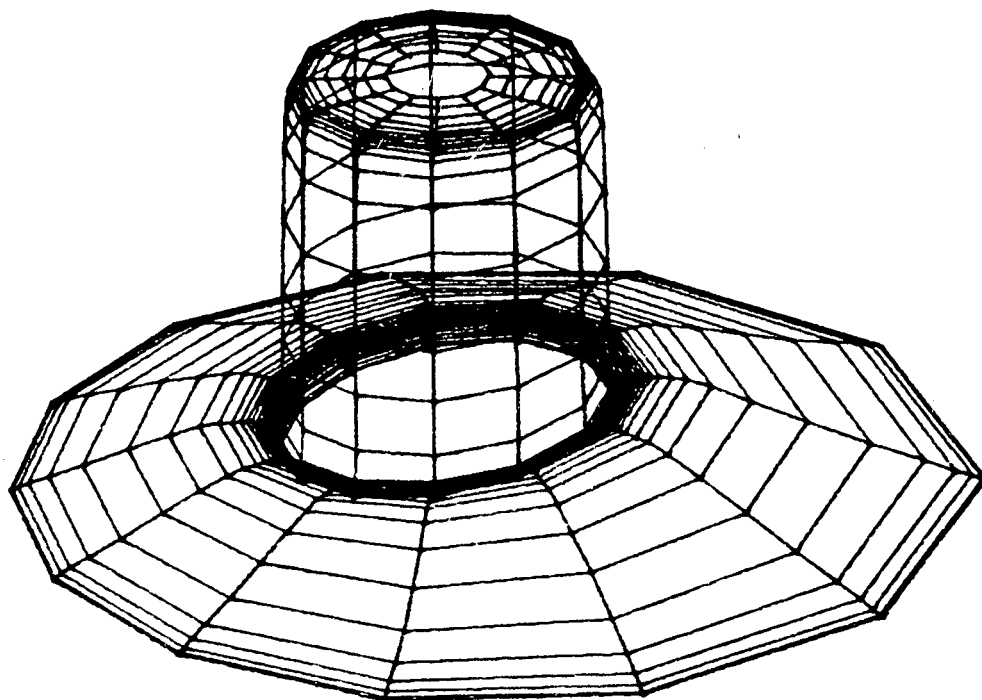


Fig. 5.47 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=3000$,
 $s/d=0,01$ e $e=5$ mm.

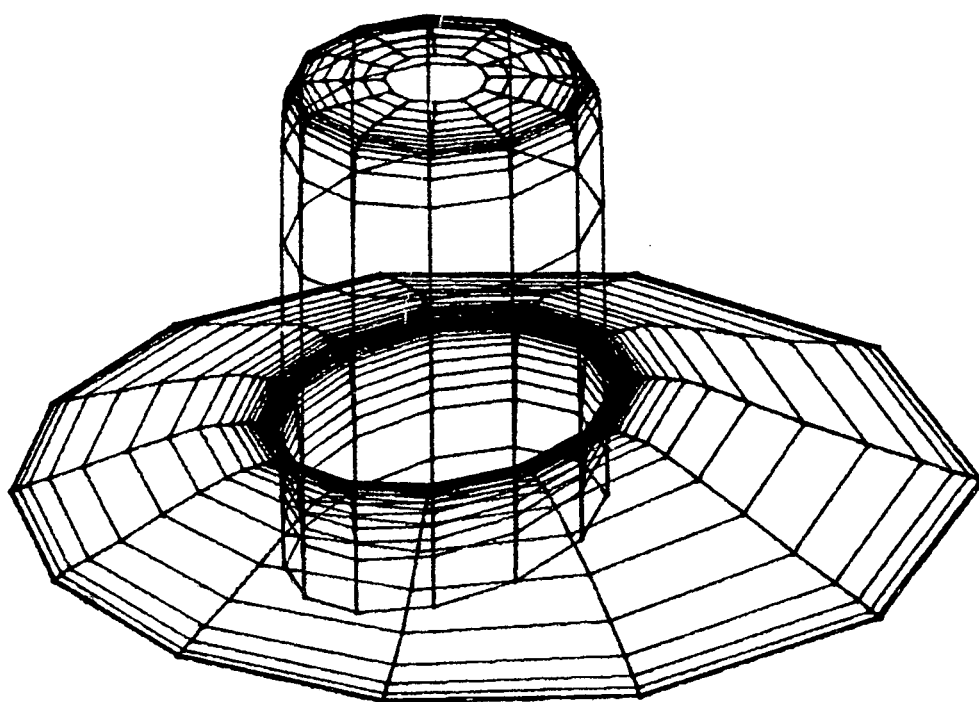


Fig. 5.48 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=3000$,
 $s/d=0,01$ e $e=5$ mm.

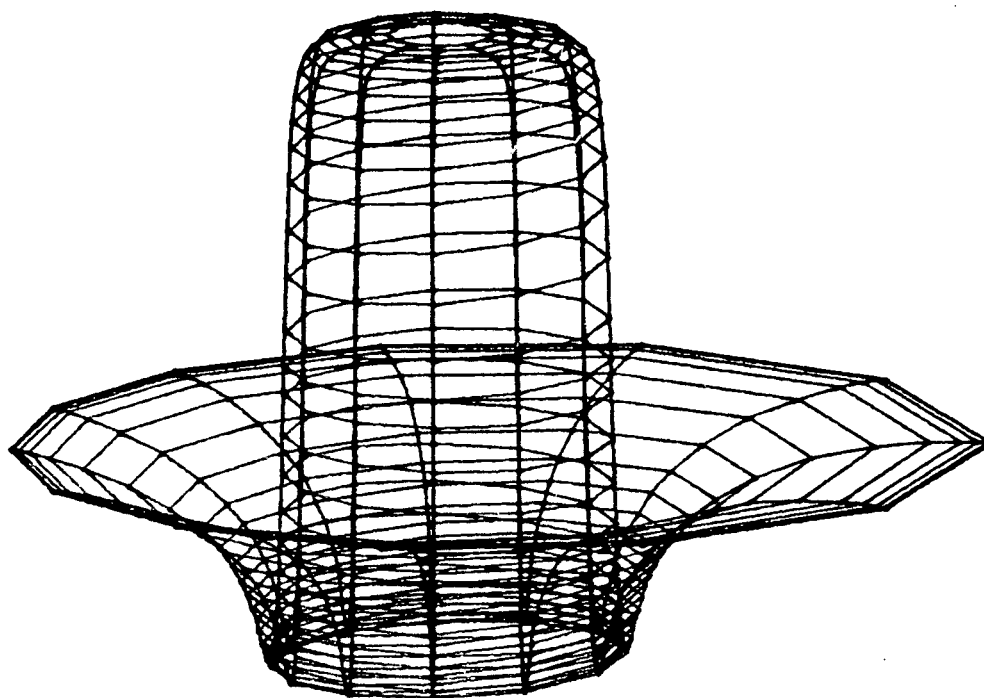


Fig. 5.49 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=3000$,
 $s/d=0,03$ e $e=5$ mm.

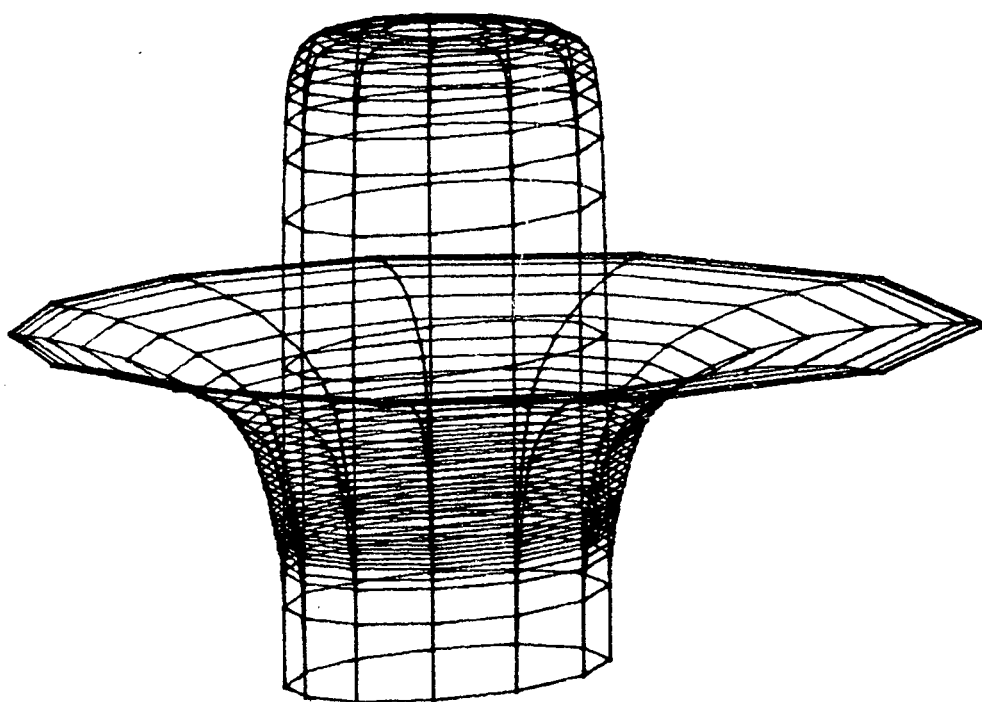


Fig. 5.50 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=3000$,
 $s/d=0,03$ e $e=5$ mm.

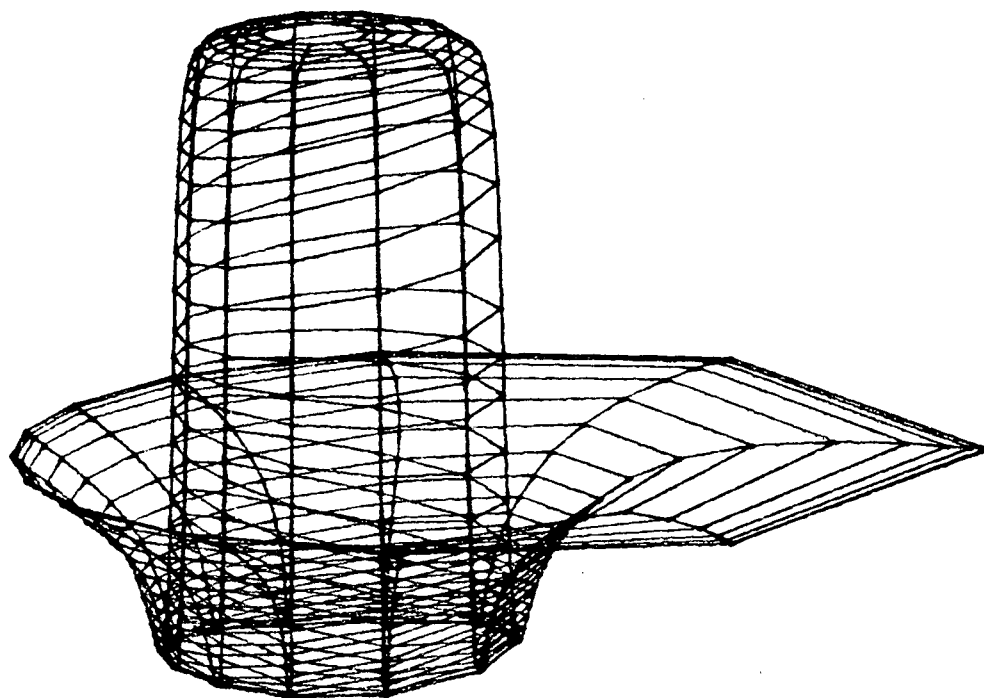


Fig. 5.51 - Campo de pressão sobre a palheta para $Re=3000$,
 $s/d=0,03$ e $e=15$ mm.

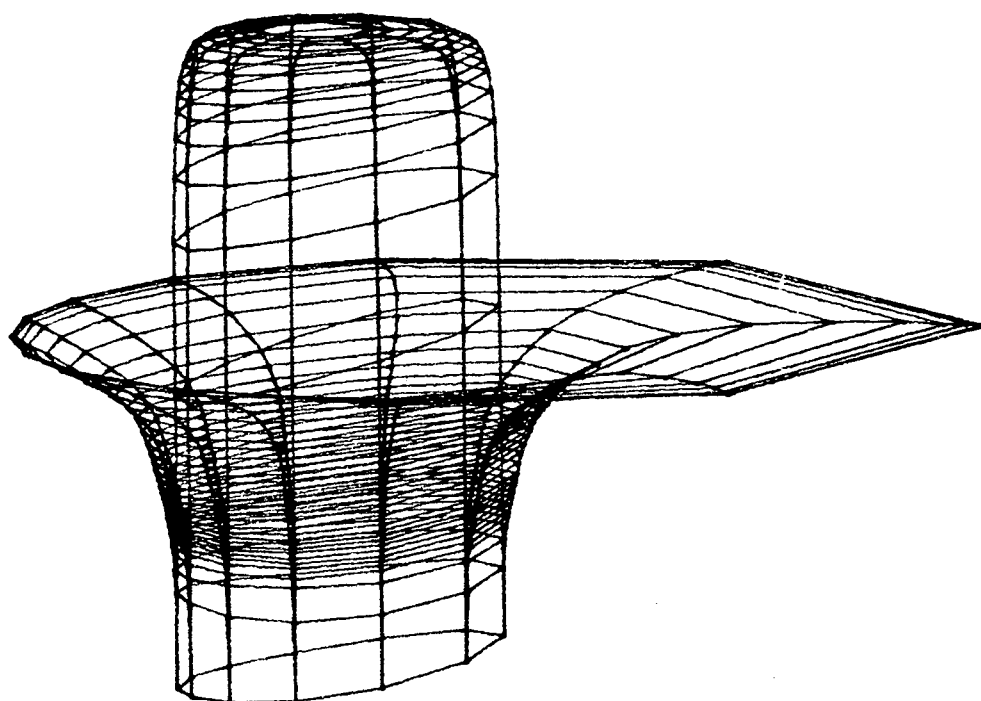


Fig. 5.52 - Campo de pressão sobre o assento para $Re=3000$,
 $s/d=0,03$ e $e=15$ mm.

6. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou uma investigação numérica, através do método dos volumes finitos, com validação experimental do escoamento laminar, incompressível e isotérmico de ar em difusores radiais excêntricos.

O principal objetivo deste estudo é aperfeiçoar, com a introdução da excentricidade, o modelamento do escoamento de gás nos sistemas de válvula de compressores de refrigeração.

As equações governantes do escoamento foram escritas no sistema de coordenadas bicilíndricas, que é o sistema de coordenadas ortogonal que se adapta naturalmente à geometria do escoamento.

O modelo numérico foi validado através da análise de problemas mais simples com soluções analíticas e, principalmente, através da comparação do perfil radial de pressão sobre a palheta com resultados experimentais.

Foram apresentados todos os equipamentos utilizados no experimento, além da descrição detalhada do procedimento experimental. É importante ressaltar que a obtenção de bons resultados experimentais depende essencialmente da medição correta do afastamento entre palheta e assento. O escoamento é muito sensível em relação a este parâmetro, especialmente para os menores valores de afastamento.

Para a maioria dos casos obteve-se uma boa concordância entre os resultados numérico e experimental, em toda a região da palheta. Contudo, para números de Reynolds e afastamentos maiores, as comparações na região do difusor não foram satisfatórias. Isto talvez se explique devido ao surgimento de maiores gradientes de pressão, o que não pode ser captado através da utilização da mesma malha.

Após a validação do modelo numérico, investigou-se a influência da excentricidade sobre o escoamento através da análise dos

campos de pressão e velocidade.

Para uma determinada excentricidade, observou-se uma grande influência do afastamento e número de Reynolds sobre o perfil adimensional de pressão ao longo da palheta, principalmente para os menores afastamentos.

A influência da excentricidade sobre o escoamento apresentou duas tendências distintas. Para afastamentos menores verificou-se uma pequena redução da resistência ao escoamento com o aumento da excentricidade, comprovada pela queda do patamar de pressão na região de estagnação. Contudo, em afastamentos maiores, o surgimento de grandes regiões de recirculação inverte essa tendência, ocorrendo um crescimento do patamar de pressão e, conseqüentemente, da resistência ao escoamento. A excentricidade, apesar de tornar o escoamento tridimensional e assimétrico, modificando sensivelmente os campos de pressão e velocidade, não altera significativamente os parâmetros globais do escoamento como força, áreas efetivas de força e escoamento que são os parâmetros efetivamente utilizados na simulação numérica do sistema de válvulas de compressores de refrigeração. No entanto, o carregamento da palheta, utilizado para a análise da distribuição de tensões, é amplamente alterado e como tal deve ser considerado.

O método dos volumes finitos mostrou-se bastante satisfatório e versátil para a solução do problema proposto. Na tentativa de melhorar o modelo numérico pode-se investigar a utilização de outras funções de interpolação que não a lei de potência, além de discretizar os termos fontes de maneira distinta.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] - DESCHAMPS, C.J.. "Escoamento Laminar Através de Válvulas de Compressores". Florianópolis: UFSC, 1987. 113p. Dissertação (Mestrado em Ciências Térmicas) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- [02] - PATANKAR, S.V.. "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow". Washingtton D.C.: Hemisphere Publ. Corp., 1980.
- [03] - BEAN, H.S.. " Fluid Meters - Their Theory and Application". 6th Ed. The American Society of Mechanical Engineers, 1971.
- [04] - SETTARI, A.; AZIZ, K.. "A Generalization of the Additive - Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations" SIAM J. Numerical Analysis, Vol. 10, pp.506 - 521, 1973.
- [05] - PATANKAR, S.V. "A Numerical Method for Conduction in Composite Materials, Flow in Regular Geometries, and Conjugate Heat Transfer". Proc. 6th International Heat Transfer Conference Toronto. pp. 297 - 304, vol. 3, 1978.
- [06] - DE HENAU, V.; RAITHEY, G.D.; THOMPSON, B.E. "A Total Pressure Correction for Upstream Weighted Schemes". International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 9, pp.855 - 864, 1989.
- [07] - SOEDEL, W. "Introduction to Computer Simulation of Positive Displacement Type Compressors". West Lafayette: School of Mechanical Engineering, Purdue University, 1972. (Notas de aula).
- [08] - HOLMAN, J.P. "Experimental Methods for Engineers". Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1981.
- [09] - YOVANOVICH, M.M. "Advanced Heat Conduction". Washington D.C.: Hemisphere Publ. Corp., 1976.

- [10] - PRATA, A.T. "Análise Tensorial em Mecânica dos Fluidos".
Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina,
1990. (Notas de aula).

APÊNDICES

A - ANÁLISE DA INCERTEZA ASSOCIADA AOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Este apêndice mostra a análise da incerteza associada à leitura de todos os parâmetros utilizados na realização do experimento, além daqueles que foram deles derivados. A metodologia aqui adotada é aquela proposta por Holman [08].

A.1. Incerteza associada à medição dos parâmetros primários

Os parâmetros primários são denominados aqui como sendo aqueles que não utilizam qualquer relação matemática envolvendo outros parâmetros medidos no experimento. Neste trabalho são eles: excentricidade, afastamento, correção do afastamento, diâmetro do orifício de passagem, diâmetro da palheta, temperatura ambiente, pressão atmosférica, posição radial da tomada de pressão da palheta, pressão a montante da placa de orifício, pressão a montante do assento, pressão manométrica sobre a palheta e queda de pressão na placa de orifício.

O valor assumido para a incerteza relacionada aos parâmetros primários foi aquele correspondente à metade da menor divisão de escala utilizada na leitura. A tabela A.1 apresenta esses valores para os parâmetros aqui utilizados.

Tabela A.1- Incerteza associada à medição dos parâmetros primários.

Parâmetro	Incerteza
excentricidade (e)	0,005 mm
afastamento (s)	0,01 mm *
correção do afastamento (s_c)	0,5 μm **
diâmetro do orifício (d)	0,05 mm ***
diâmetro da palheta (D)	0,05 mm ***
posição radial (r)	0,1 mm ****
temperatura ambiente (T_{amb})	0,5 °C
pressão atmosférica (P_{atm})	0,5 mbar

* determinado segundo o procedimento descrito no item 3.2.3

** para o fundo de escala de $\pm 30 \mu\text{m}$.

*** medição realizada com um paquímetro.

**** estimado pelas marcações efetuadas no cursor.

Para as medições de pressão realizadas pelos transdutores, assume-se que a incerteza é correspondente àquela do manômetro utilizado em suas calibrações, ou seja, em um micromanômetro inclinado de álcool etílico tipo Wilhelm Lambrecht KG-Göttingen descrito no item 3.2.1, para as pressões mais baixas, e em um manômetro em "U" de álcool etílico para as pressões mais elevadas.

Para o manômetro inclinado, sabe-se que,

$$p = \rho_m g L \sin \theta \quad (\text{A.1})$$

onde

p - pressão manométrica [Pa];

ρ_m - massa específica do álcool etílico hidratado 92 INPM
[800 kg/m³];

L - leitura do manômetro [m];

g - aceleração da gravidade [$9,80665 \text{ m/s}^2$];

θ - inclinação do manômetro [graus].

Admitindo que a única variável medida seja L , então,

$$p = p(L) \quad (\text{A.2})$$

Assim, a incerteza na medição de p é dada por,

$$dp = \frac{\partial p}{\partial L} dL \quad (\text{A.3})$$

Assume-se, neste caso, que a incerteza na leitura do micromanômetro, dL , seja correspondente à metade do valor da menor divisão de escala, isto é, $0,5 \text{ mm}$. Desta forma, determina-se o valor da incerteza na medição da pressão sobre a palheta, dp , assim como a incerteza referente à queda de pressão na placa de orifício, DP_{or} .

As demais pressões são medidas diretamente por um manômetro em "U" ou através do próprio manômetro inclinado. A determinação da incerteza, quando se utiliza o manômetro em "U", segue o mesmo procedimento descrito para o caso do micromanômetro inclinado, fazendo-se $\theta=90^\circ$ na equação A.1.

A.2. Incerteza associada à determinação dos parâmetros dependentes

Os parâmetros dependentes utilizados na redução dos dados são enumerados em: massa específica (ρ), viscosidade absoluta (μ), velocidade média no orifício de passagem (\bar{w}), pressão adimensional sobre a palheta (p^*), fluxo de massa (\dot{m}) e número de Reynolds, (Re).

A.2.1. Determinação de $d\rho$

A massa específica do ar é calculada por,

$$\rho = \frac{p_{mv} M}{\bar{R} T_{amb}} \quad (A.4)$$

onde p_{mv} - pressão absoluta a montante da válvula [Pa];
 \bar{R} - constante universal dos gases, 8314,3 J/kg-mol K;
 M - massa molecular do ar, 28,98 kg/kg-mol;
 T_{amb} - temperatura ambiente [K].

Portanto,

$$\rho = \rho(p_{mv}, T_{amb}) \quad (A.5)$$

e, assim,

$$d\rho = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial p_{mv}} dp_{mv} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T_{amb}} dT_{amb} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (A.6)$$

A.2.2. Determinação de $d\mu$

A viscosidade, μ , é calculada pela equação (3.6), sendo função apenas da temperatura ambiente. Portanto, a incerteza a ela associada é dada por,

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial T_{amb}} dT_{amb} \quad (A.7)$$

A.2.3. Determinação de \dot{m}

O fluxo de massa, \dot{m} , é determinado por,

$$\dot{m} = 0,034752 \cdot K \cdot Y \cdot d_0^2 \cdot F_a \cdot \sqrt{h_w \cdot \rho} \quad [\text{kg/s}] \quad (\text{A.8})$$

onde

$$K = K_0 + \frac{1000 \cdot B}{\sqrt{10 \cdot \rho \cdot \bar{v} \cdot d_c / \mu}}$$

$$Y = 1 - \frac{(0,41 - 0,35 \cdot \beta^4) \cdot DP_{or}}{(Cp/Cv) \cdot p_{mo}}$$

$$\beta = d_0 / d_c$$

$$Cp/Cv = 1,4$$

$$F_a = 1$$

d_0 - diâmetro do orifício medidor, 10,17 mm [cm]

d_c - diâmetro da canalização, 3,071 pol [cm]

μ - viscosidade absoluta do fluido [Pa.s]

ρ - massa específica do fluido [g/cm³]

\bar{v} - velocidade média do fluido na canalização [m/s]

DP_{or} - queda de pressão no orifício medidor [Pa]

p_{mo} - pressão absoluta a montante do orifício [Pa]

h_w - queda de pressão no orifício medidor [cm H₂O]

e B é calculado por:

$$B = (0,0002 + 0,0011/d_c) + (0,0038 + 0,0004/d_c) * \\ * [\beta^2 + (16,5 + 5 \cdot d_c) * \beta^{16}]$$

$$K_0 = (0,6014 - 0,01352/d_c^{0,25}) + (0,376 + 0,07257/d_c^{0,25}) * \\ * [0,00025/(d_c^2 \cdot \beta^2 + 0,0025 \cdot d_c) + \beta^4 + 1,5 \cdot \beta^{16}]$$

onde d_c é dado em polegadas.

No entanto, considerando, por simplicidade, que

$$\dot{m} = \dot{m}(h_w, \rho) \quad (A.9)$$

tem-se,

$$d\dot{m} = \left[\left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial h_w} dh_w \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} d\rho \right)^2 \right]^{1/2} \quad (A.10)$$

A determinação de dh_w pode ser realizada pela equação,

$$h_w = \frac{DP_{or}}{\rho_{H_2O} \cdot g} \times 100 \quad [cm \ H_2O] \quad (A.11)$$

Assim,

$$dh_w = \frac{\partial h_w}{\partial DP_{or}} d(DP_{or}) \quad (A.12)$$

O valor de $d\rho$ é determinado segundo o procedimento descrito no item A.2.1.

A.2.4. Cálculo de \bar{w}

A velocidade média do escoamento no orifício de passagem é determinada através da equação da conservação da massa, por,

$$\bar{w} = \frac{4 \cdot \dot{m}}{\rho \cdot \Pi \cdot d^2} \quad (\text{A.13})$$

Desta forma, para

$$\bar{w} = \bar{w}(\dot{m}, \rho, d) \quad (\text{A.14})$$

obtém-se,

$$d\bar{w} = \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \dot{m}} d\dot{m} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho} d\rho \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial d} d(d) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.15})$$

onde $d(d)$, $d\rho$ e $d\dot{m}$ são valores conhecidos dos itens A.1, A.2.1 e A.2.4, respectivamente.

A.2.5. Determinação da incerteza no cálculo da pressão adimensional.

A pressão manométrica atuando na superfície da palheta é adimensionalizada através da seguinte equação,

$$p^* = \frac{p}{1/2 \rho \bar{w}^2} \quad (\text{A.16})$$

Portanto, pode-se assumir que,

$$p^* = p^*(p, \rho, \bar{w}) \quad (\text{A.17})$$

e, assim, a incerteza dp^* é dada por,

$$dp^* = \left[\left(\frac{\partial p^*}{\partial p} dp \right)^2 + \left(\frac{\partial p^*}{\partial \rho} d\rho \right)^2 + \left(\frac{\partial p^*}{\partial \bar{w}} d\bar{w} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.18})$$

onde todas as demais incertezas possuem seus valores conhecidos.

A.2.5. Cálculo da incerteza na determinação do número de Reynolds.

O número de Reynolds é definido como,

$$Re = \frac{\rho \cdot \bar{w} \cdot d}{\mu} \quad (\text{A.19})$$

e, portanto,

$$Re = Re(p, \bar{w}, d, \mu) \quad (\text{A.20})$$

Assim,

$$d(Re) = \left[\left(\frac{\partial Re}{\partial p} dp \right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial \bar{w}} d\bar{w} \right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial d} d(d) \right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial \mu} d\mu \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.21})$$

onde dp , $d\bar{w}$, $d(d)$ e $d\mu$ são conhecidos dos itens anteriores.

A tabela A.2 apresenta valores característicos das diversas

variáveis envolvidas no experimento e suas respectivas incertezas.

Tabela A.2 - Incertezas associadas aos parâmetros envolvidos no experimento.

Variável	Valor típico	Incerteza	Incerteza(%)
p [Pa]	1613,0	3,92 #	0,24
DP_{or} [Pa]	290,0	1,96 ##	0,68
p_{mo} [Pa]	104140	50,0 ###	0,048
p_{mv} [Pa]	104013	50,0 ###	0,048
ρ [kg/m ³]	1,260	$2,24 \times 10^{-3}$	0,18
μ [Pa.s]	$1,81 \times 10^{-5}$	$2,41 \times 10^{-8}$	0,13
h_w [cm H ₂ O]	2,96	$2,00 \times 10^{-2}$	0,68
\dot{m} [kg/s]	$1,31 \times 10^{-3}$	$4,7 \times 10^{-6}$	0,36
\bar{w} [m/s]	1,473	$7,66 \times 10^{-3}$	0,52
T_{amb} [K]	290,0	0,5	0,17
p_{atm} [Pa]	102400	50,0	0,048
Re	3077,0	18,1	0,59
p^*	1180,0	12,8	1,08

- considerando como padrão de calibração o manômetro em "U" de álcool etílico.

- manômetro inclinado na escala de 1:2 ($\theta=30^0$).

- como são valores de pressão absoluta, utilizou-se a incerteza da leitura da pressão atmosférica, devido ao seu maior valor.

Em todos os cálculos realizados na determinação das incertezas é importante observar as unidades utilizadas em cada

equação.

O cálculo da incerteza para a pressão adimensional resultou em um valor de 1,08%. Apesar disso, verificou-se no item 2.2.3 a existência de uma forte dependência deste parâmetro, com o afastamento entre palheta e assento, s . No entanto, esta variável não foi utilizada nos cálculos da incerteza efetuados para p^* . Por isso, baseado nos testes experimentais apresentados no item 3.2.3 (figs 3.1 a 3.4), em conjunto com o resultado numérico apresentado na fig. 2.5, estima-se uma incerteza majorada em $\pm 10\%$ para a determinação de p^* .

B. SISTEMA DE COORDENADAS BICILÍNDRICAS

São apresentadas, neste apêndice, algumas características importantes relacionadas com o sistema de coordenadas bicilíndricas, cujas coordenadas são designadas aqui por η , ψ e z .

A utilização deste sistema de coordenadas, no estudo do escoamento em difusores radiais excêntricos, se faz necessária devido a sua adequação natural à geometria do problema.

B.1. Relações geométricas

O sistema de coordenadas bicilíndricas é ilustrado na Fig. B.1. As coordenadas (η, ψ) em qualquer plano $z=\text{constante}$ são obtidas pela seguinte transformação conforme, em relação às coordenadas cartesianas (x, y) ,

$$\xi = x + i.y = i.a.\cotg(t/2) \quad (B.1)$$

onde $t = \psi + i.\eta$ e $a > 0$.

Substituindo $t = \psi + i.\eta$ na equação (B.1) e usando as relações,

$$\cotg(i.\theta) = \frac{\cosh(\theta)}{i.\sinh(\theta)} \quad (B.2a)$$

$$\cotg(\alpha+\theta) = \frac{\cotg\alpha.\cotg\theta - 1}{\cotg\alpha + \cotg\theta} \quad (B.2b)$$

obtém-se,

$$y = \frac{a. [\cotg(\psi/2). \cotgh^2(\eta/2) - \cotg(\psi/2)]}{\cotg^2(\psi/2) + \cotgh^2(\eta/2)} \quad (B.5)$$

Desenvolvendo a equação (B.4) em termos de senos e cossenos e usando as seguintes relações trigonométricas (B.6),

$$\cos^2(\alpha/2) = 1/2 + 1/2.\cos\alpha \quad (B.6a)$$

$$\sin^2(\alpha/2) = 1/2 - 1/2.\cos\alpha \quad (B.6b)$$

$$\cosh(\alpha/2) = \frac{\sinh\alpha}{2.\sinh(\alpha/2)} \quad (B.6c)$$

$$\cosh^2(\alpha/2) = 1/2 + 1/2.\cosh\alpha \quad (B.6d)$$

$$\sinh^2(\alpha/2) = 1/2.\cosh\alpha - 1/2 \quad (B.6e)$$

chega-se a,

$$x = \frac{a.\sinh\eta}{\cosh\eta - \cos\psi} \quad (B.7)$$

Analogamente, desenvolvendo a equação (B.5), obtém-se,

$$y = \frac{a.\sin\psi}{\cosh\eta - \cos\psi} \quad (B.8)$$

Portanto, as relações geométricas entre os sistemas de coordenadas bicilíndricas e cartesiano são dadas pela equações (B.7), (B.8) e (B.9).

$$z = z \quad (B.9)$$

Segundo Yovanovich [09], a condição necessária e suficiente para a ortogonalidade do sistema de coordenadas bicilíndricas é dada por,

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0 \quad (B.10a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial z}{\partial z} = 0 \quad (B.10b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial z} = 0 \quad (B.10c)$$

Usando as equações de transformação (B.7), (B.8) e (B.9) demonstra-se facilmente que o sistema de coordenadas bicilíndricas é um sistema ortogonal.

B.2. Visualização do sistema de coordenadas bicilíndricas

A Fig. B.1 apresenta um esquema dos principais parâmetros do sistema de coordenadas bicilíndricas.

As circunferências $\eta=\text{constante}$ são traçadas a partir de dois polos de coordenadas $x=\pm a$, enquanto que as circunferências $\psi=\text{constante}$ possuem seus centros no eixo y .

O sistema tridimensional pode ser gerado pela translação dos círculos paralelamente ao eixo z , que está direcionado perpendicularmente ao plano xy . As superfícies coordenadas são as

superfícies cilíndricas $\eta=\text{constante}$, as superfícies cilíndricas $\psi=\text{constante}$ e os planos $z=\text{constante}$.

Outras relações geométricas importantes podem ser obtidas analisando-se as circunferências η e ψ constantes, isoladamente. A Fig. B.2 apresenta uma circunferência $\eta=\text{constante}$ com centro em $(x,y)=(t,0)$.

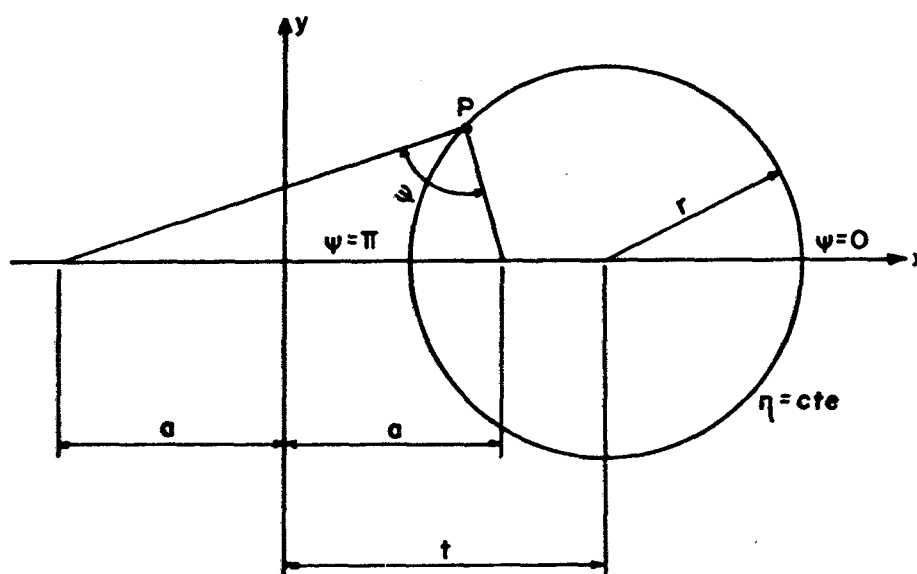


Fig. B.2 - Circunferência $\eta=\text{constante}$ com centro em $(x,y)=(t,0)$.

Fazendo $\psi=0$ e $\psi=\pi$ na equação (B.7) obtém-se, respectivamente, as equações (B.11) e (B.12),

$$x = \frac{a \cdot \sinh \eta}{\cosh \eta - 1} = t + r \quad (\text{B.11})$$

$$x = \frac{a \cdot \sinh \eta}{\cosh \eta + 1} = t - r \quad (\text{B.12})$$

Das equações (B.11) e (B.12) resultam,

$$t = a \cdot \cotgh \eta \quad (B.13)$$

e

$$r = \frac{a}{|\sinh \eta|} \quad (B.14)$$

para $r > 0$, uma vez que $a > 0$.

Desta forma, o raio da circunferência depende de η , tornando-se infinito quando $\eta \rightarrow 0$ e zero quando $\eta \rightarrow \infty$. O centro da circunferência é deslocado ao longo do eixo x à medida que η varia, sendo $x=a$ quando $\eta \rightarrow \infty (r=0)$ e $x \rightarrow \infty$ quando $\eta \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)$.

Similarmente, para uma circunferência com centro em $(x,y)=(0,t')$, tem-se,

$$t' = a \cdot \cotg \psi \quad (B.15)$$

$$r' = \frac{a}{|\sin \psi|} \quad (B.16)$$

No sistema de coordenadas bicilíndricas, η varia de $-\infty$ a $+\infty$ onde os valores positivos são assumidos para valores positivos de x e negativos, para valores negativos de x . A coordenada ψ representa o ângulo entre as linhas traçadas dos polos ($x=\pm a$) a um dado ponto P , conforme ilustra a Fig. B.3. Assim, $\psi=\pi$ representa uma parte do plano xz entre $x=-a$ e $x=+a$, enquanto $\psi=0$ representa o restante do plano xz .

As regiões da superfície cilíndrica $\psi=\text{constante}$, localizadas acima do plano xz , em $y=0$, são designadas por valores

positivos de ψ , enquanto que aquelas abaixo são designadas por valores negativos de ψ .

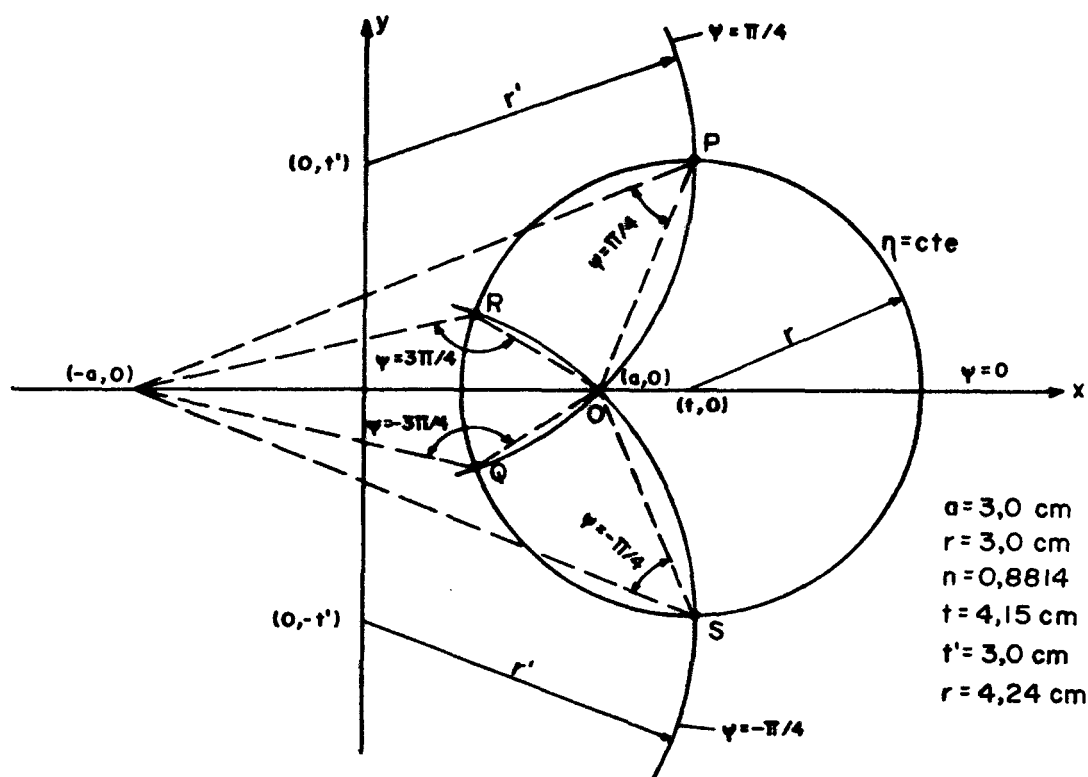


Fig. B.3 - Representação da coordenada ψ .

Nota-se na Fig. (B.3) que todos os pontos localizados sobre a circunferência centrada em $(x, y) = (0, t')$, entre os pontos O e P, são designados por $\psi = \pi/4$, enquanto que os pontos localizados entre O e Q possuem coordenada $\psi = -3\pi/4$.

B.3. Cálculo das métricas ou coeficientes de Lamé

Considerem-se as relações funcionais entre um sistema de coordenadas ortogonal geral (u_1, u_2, u_3) e o sistema cartesiano (x, y, z) , dadas por (B.17),

$$x = x(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{B.17a})$$

$$y = y(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{B.17b})$$

$$z = z(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{B.17c})$$

As métricas deste sistema são definidas segundo [09] por,

$$g_i = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2 \quad (\text{B.18})$$

com $i=1,2,3$.

Para o sistema de coordenadas bicilíndricas em questão, tem-se,

$$g_\psi = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2 \quad (\text{B.19a})$$

$$g_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \quad (\text{B.19b})$$

$$g_z = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 \quad (\text{B.19c})$$

Portanto, usando as equações (B.7), (B.8) e (B.9), encontra-se,

$$g_\psi = g_\eta = \frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \psi)^2} = h^2 \quad (\text{B.20a})$$

e

$$g_z = 1 \quad (B.20b)$$

Ao longo de cada eixo coordenado ψ , η e z , pode-se determinar os elementos diferenciais de comprimento ds_ψ , ds_η e ds_z , usando-se os coeficientes métricos, por,

$$ds_\psi = \sqrt{g_\psi} d\psi \quad (B.21a)$$

$$ds_\eta = \sqrt{g_\eta} d\eta \quad (B.21b)$$

$$ds_z = \sqrt{g_z} dz \quad (B.21c)$$

Conhecendo os coeficientes métricos pode-se determinar, também, as equações para os elementos de área e volume. Por exemplo,

$$dA_z = ds_\psi \cdot ds_\eta = \sqrt{g_\psi \cdot g_\eta} d\psi \cdot d\eta \quad (B.22a)$$

e

$$dV = ds_\psi \cdot ds_\eta \cdot ds_z = \sqrt{g_\psi \cdot g_\eta \cdot g_z} d\psi \cdot d\eta \cdot dz \quad (B.22b)$$

onde dA_z é um elemento de área perpendicular ao eixo z .

B.4. Operadores Gradiente, Divergente e Laplaciano

O operador vetorial nabla, ∇ , em um sistema de coordenadas ortogonal geral é dado por [10],

$$\nabla() = \frac{\hat{e}_1}{\sqrt{g_1}} \frac{\partial()}{\partial u_1} + \frac{\hat{e}_2}{\sqrt{g_2}} \frac{\partial()}{\partial u_2} + \frac{\hat{e}_3}{\sqrt{g_3}} \frac{\partial()}{\partial u_3} \quad (\text{B.23})$$

onde \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 são os vetores de base do sistema de coordenadas ortogonal (u_1, u_2, u_3) .

Para o sistema de coordenadas bicilíndricas, tem-se,

$$\nabla() = \frac{\hat{e}_\psi}{h} \frac{\partial()}{\partial \psi} + \frac{\hat{e}_\eta}{h} \frac{\partial()}{\partial \eta} + \hat{e}_z \frac{\partial()}{\partial z} \quad (\text{B.24})$$

onde \hat{e}_ψ , \hat{e}_η e \hat{e}_z são os vetores de base do sistema de coordenadas bicilíndricas.

Portanto, o gradiente de uma função escalar T é dado por,

$$\nabla T = \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \psi} \hat{e}_\psi + \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} \hat{e}_\eta + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z \quad (\text{B.25})$$

Aplicando escalarmente o operador nabla a uma função vetorial \vec{V} , obtém-se o operador divergente,

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial(hV_\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hV_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h^2V_z)}{\partial z} \right] \quad (\text{B.26})$$

onde V_ψ , V_η e V_z são as componentes de \vec{V} nas direções ψ , η e z , respectivamente.

De forma semelhante, o laplaciano de uma função escalar T é dado por,

$$\nabla^2 T = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{B.27})$$

B.5. Sistema de coordenadas bicilíndricas aplicado ao problema do difusor radial excêntrico

O sistema de coordenadas bicilíndricas é um sistema de coordenadas ortogonal que se adapta perfeitamente à geometria do difusor radial excêntrico. A Fig. B.4 mostra como o sistema de coordenadas bicilíndricas pode ser utilizado no estudo do escoamento em difusores radiais excêntricos.

A circunferência centrada em $(x,y)=(t_1,0)$ de raio r_1 possui uma coordenada $\eta = \eta_1$ e define a região de entrada do fluxo de massa, ou seja, o orifício de passagem, ver o esquema da Fig. 4.1. A coordenada $\eta = \eta_2$ representa a circunferência centrada em $(x,y)=(t_2,0)$ de raio r_2 que define a região de saída do fluxo de massa, isto é, a palheta. Portanto, a diferença entre t_1 e t_2 define a excentricidade, e , entre o orifício de passagem e a palheta. A excentricidade, e , é um dos parâmetros geométricos importantes do presente trabalho.

Para a geometria descrita na Fig. B.4, o parâmetro " a " pode ser determinado quando se especificam os raios r_1 , r_2 e a excentricidade e .

Utilizando as equações B.13 e B.14 e a seguinte relação entre as funções hiperbólicas (B.28),

$$\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1 \quad (\text{B.28})$$

tem-se,

$$t^2 = r^2 + a^2 \quad (\text{B.29})$$

Aplicando a definição da excentricidade,

$$e = t_2 - t_1 \quad (\text{B.30})$$

obtém-se uma equação implícita para o parâmetro "a".

$$a = \left\{ \frac{1}{2} \left[e^2 - r_2^2 - r_1^2 + 2\sqrt{(a^2 + r_2^2) \cdot (a^2 + r_1^2)} \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{B.31})$$

que completa a descrição da geometria.

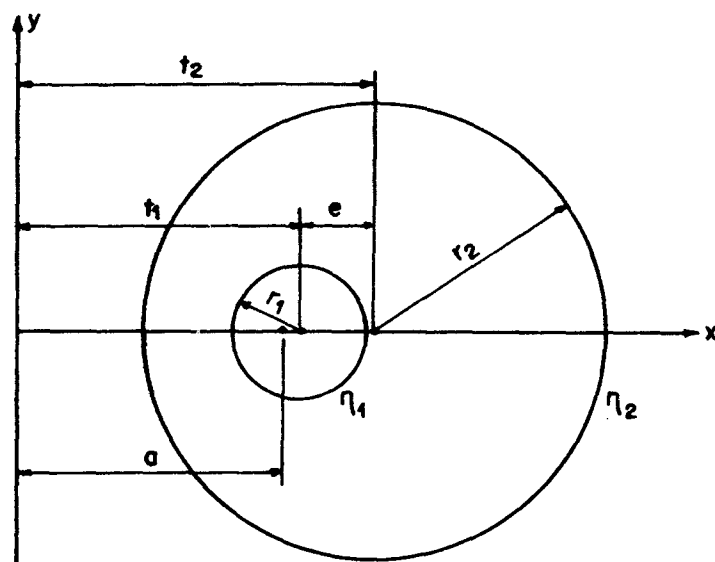


Fig. B.4 - Sistema de coordenadas bicilíndricas aplicado à geometria do difusor radial excêntrico.

C. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

C.1. Introdução

O método dos volumes finitos consiste, basicamente, em dividir o domínio de cálculo (região que se deseja estudar) em um número finito de volumes de controle não sobrepostos de tal maneira que cada um deles envolva um ponto, onde se deseja conhecer o valor de uma determinada propriedade. A equação diferencial envolvendo tal propriedade é, então, integrada em cada um dos volumes. Esta, por sua vez, após ser desenvolvida através da utilização de funções de interpolação, dá origem a uma equação contendo o valor da propriedade para um conjunto de pontos, denominada equação discretizada.

Este apêndice dedica-se à determinação das equações discretizadas para o problema do escoamento em difusores radiais excêntricos.

C.2. Equação da conservação da massa

A equação da conservação da massa em coordenadas bicilíndricas é dada por,

$$\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho h u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho h v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h^2 w) \right] = 0 \quad (C.1)$$

O volume de controle usado na integração da equação acima é, ao apresentado na Fig. C.1, juntamente com a nomenclatura utilizada.

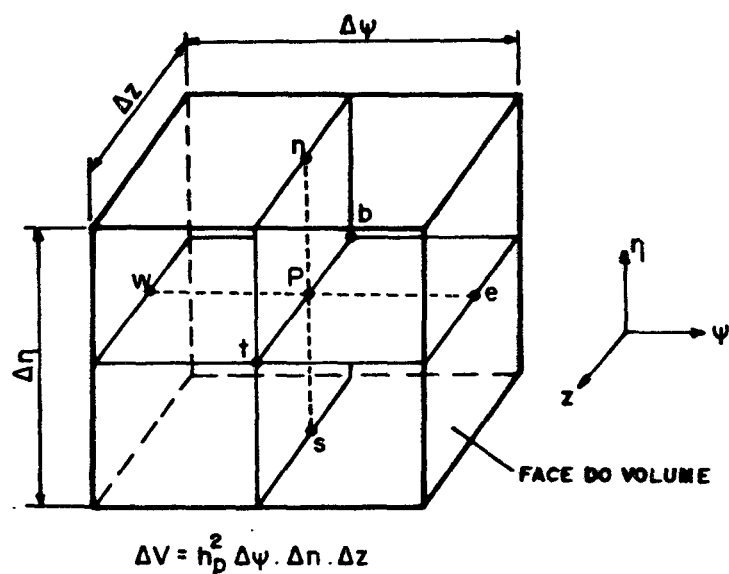


Fig. C.1 - Volume de controle para a integração da equação da conservação da massa.

Integrando a equação C.1 no volume de controle indicado na Fig. C.1, tem-se,

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho h u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho h v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h^2 w) \right] h^2 d\psi d\eta dz = 0 \quad (C.2)$$

que resulta em,

$$(F_e - F_w) + (F_n - F_s) + (F_t - F_b) = 0 \quad (C.3)$$

onde $F_e = (\rho h u)_e \Delta \eta \Delta z \quad (C.4a)$

$F_w = (\rho h u)_w \Delta \eta \Delta z \quad (C.4b)$

$$F_n = (\rho h v)_n \Delta \psi \Delta z \quad (C.4c)$$

$$F_s = (\rho h v)_s \Delta \psi \Delta z \quad (C.4d)$$

$$F_t = (\rho h^2 w)_t \Delta \eta \Delta \psi \quad (C.4e)$$

$$F_b = (\rho h^2 w)_b \Delta \eta \Delta \psi \quad (C.4f)$$

No presente trabalho, devido à aplicação do arranjo desencontrado dos volumes de controle, os valores das velocidades nas faces do volume são conhecidas.

C.3. Equação de Navier-Stokes na direção ψ

A equação da quantidade de movimento na direção ψ , equação 4.1, pode ser escrita como,

$$\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho h u u - \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho h v u - \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho h^2 w u - \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = S^u \quad (C.5)$$

onde

$$S^u = - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial \psi} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial \psi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{\rho v^2}{h} \frac{\partial h}{\partial \psi} -$$

$$- \frac{\mu u}{h^3} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\rho v u}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \eta} \quad (C.6)$$

é o termo fonte da equação.

A integração da equação C.5 no volume de controle para a velocidade u , apresentado na Fig. C.2, fornece,

$$(J_e - J_w) + (J_n - J_s) + (J_t - J_b) = S^u \quad (C.7)$$

onde $J_e = \left(\rho h u u - \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)_e \Delta \eta_u \Delta z_u$ (C.8a)

$$J_w = \left(\rho h u u - \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)_w \Delta \eta_u \Delta z_u \quad (C.8b)$$

$$J_n = \left(\rho h v u - \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_n \Delta \psi_u \Delta z_u \quad (C.8c)$$

$$J_s = \left(\rho h v u - \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_s \Delta \psi_u \Delta z_u \quad (C.8d)$$

$$J_t = \left(\rho h^2 w u - \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right)_t \Delta \psi_u \Delta \eta_u \quad (C.8e)$$

$$J_b = \left(\rho h^2 w u - \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right)_b \Delta \psi_u \Delta \eta_u \quad (C.8f)$$

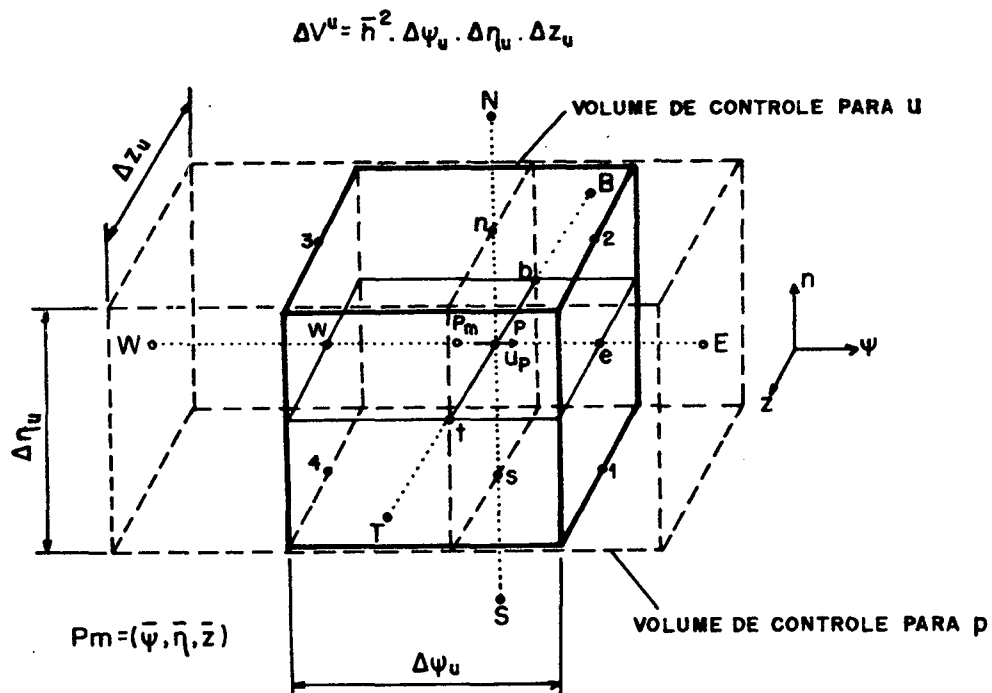


Fig. C.2 - Volume de controle para a velocidade u.

A integração do termo fonte relativo à pressão fornece,

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \psi} h^2 d\psi d\eta dz = \frac{(p_w - p_e)}{h_{\bar{\psi}} \Delta \psi_u} \Delta V^u \quad (C.9)$$

onde p_w e p_e são conhecidos nas faces "w" e "e", respectivamente, e $\Delta V^u = \bar{h}^2 \Delta \psi_u \Delta \eta_u \Delta z_u$ é o volume do volume de controle para a velocidade u . O parâmetro $h_{\bar{\psi}}$ representa o valor da métrica, h , no ponto médio na direção ψ , ou seja, $\bar{\psi}$, enquanto \bar{h} é o valor da métrica no ponto médio do volume, p_m , dado por $(\bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{z})$.

O resultado da integração dos demais termos fonte, efetuada separadamente, é,

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z \frac{2\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \psi} h^2 d\psi d\eta dz = \frac{2\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial \psi} \right)_p \Delta V^u \quad (C.10a)$$

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z - \frac{2\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \psi} \frac{\partial v}{\partial \eta} h^2 d\psi d\eta dz = - \frac{2\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_p \Delta V^u \quad (C.10b)$$

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z - \frac{\rho v^2}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \psi} h^2 d\psi d\eta dz = - \frac{\rho_p v_p^2}{h_p^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p \Delta V^u \quad (C.10c)$$

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z - \frac{\mu u}{h^3} \frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2} h^2 d\psi d\eta dz = - \frac{\mu_p u_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2} \right)_p \Delta V^u \quad (C.10d)$$

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z - \frac{\mu u}{h^3} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} h^2 d\psi d\eta dz = - \frac{\mu_p u_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right)_p \Delta V^u \quad (C.10e)$$

$$\int_{\psi} \int_{\eta} \int_z -\frac{\rho v u}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \eta} h^2 d\psi d\eta dz = -\frac{\rho_p v_p u_p}{h_p^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_p \Delta V^u \quad (C.10f)$$

onde as métricas e suas derivadas são calculadas analiticamente a partir da equação 4.5. As derivadas da velocidade v são calculadas por,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \psi} \right)_p = \frac{\left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) - \left(\frac{v_3 + v_4}{2} \right)}{\Delta \psi_u} \quad (C.11)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_p = \frac{\left(\frac{v_2 + v_3}{2} \right) - \left(\frac{v_1 + v_4}{2} \right)}{\Delta \eta_u} \quad (C.12)$$

e

$$v_p = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4} \quad (C.13)$$

Os valores da massa específica e viscosidade absoluta no ponto p são interpoladas segundo Patankar [02].

Multiplicando a equação da conservação da massa, equação (C.3), por $-u_p$ e somando ao lado esquerdo da equação do movimento, equação (C.7), tem-se,

$$\begin{aligned} (J_e - u_p F_e) - (J_w - u_p F_w) + (J_n - u_p F_n) - (J_s - u_p F_s) + \\ (J_t - u_p F_t) - (J_b - u_p F_b) = S^u \end{aligned} \quad (C.14)$$

Usando a lei de potência [02] como função de interpolação para a determinação dos fluxos nas faces do volume, chega-se em,

$$J_e - u_p F_e = a_E (u_P - u_E) \quad (C.15a)$$

$$J_w - u_p F_w = a_W (u_W - u_P) \quad (C.15b)$$

$$J_n - u_p F_n = a_N (u_P - u_N) \quad (C.15c)$$

$$J_s - u_p F_s = a_S (u_S - u_P) \quad (C.15d)$$

$$J_t - u_p F_t = a_T (u_P - u_T) \quad (C.15e)$$

$$J_b - u_p F_b = a_B (u_B - u_P) \quad (C.15f)$$

onde os coeficientes são dados por,

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (C.16a)$$

$$a_W = D_W A(|P_W|) + [F_W, 0] \quad (C.16b)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \quad (C.16c)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [F_s, 0] \quad (C.16d)$$

$$a_T = D_t A(|P_t|) + [-F_t, 0] \quad (C.16e)$$

$$a_B = D_b A(|P_b|) + [F_b, 0] \quad (C.16f)$$

onde $[F_W, 0]$ determina o maior valor entre F_W e zero, e

$$D_e = \frac{\mu_e \Delta \eta_u \Delta z_u}{(\psi_E - \psi_P)} \quad (C.17a)$$

$$D_W = \frac{\mu_W \Delta \eta_u \Delta z_u}{(\psi_P - \psi_W)} \quad (C.17b)$$

$$D_n = \frac{\mu_n \Delta \psi_u \Delta z_u}{(\eta_N - \eta_P)} \quad (C.17c)$$

$$D_s = \frac{\mu_s \Delta \psi_u \Delta z_u}{(\eta_P - \eta_S)} \quad (C.17d)$$

$$D_t = \frac{\mu_t h_t^2 \Delta \psi_u \Delta \eta_u}{(z_T - z_P)} \quad (C.17e)$$

$$D_b = \frac{\mu_b h_b^2 \Delta \psi_u \Delta \eta_u}{(z_P - z_B)} \quad (C.17f)$$

Além disso,

$$A(|P_i|) = [0, (1-0,1 \cdot |P_i|)^5] \quad (C.18)$$

onde $i=e,w,n,s,t$ ou b , $P_i = F_i/D_i$ é o número de Peclet no ponto i e F_i é dado pela equação C.4 para o volume de controle da velocidade u .

Portanto, a equação de Navier-Stokes na direção ψ escrita na forma discretizada é dada por,

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + a_T u_T + a_B u_B + b^u \quad (C.19)$$

onde

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B - S_P^u \Delta V^u \quad (C.20a)$$

$$b^u = S_C^u \Delta V^u \quad (C.20b)$$

$$S_P^u = - \left[\frac{\mu_P}{h_P^3} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right)_P + \frac{\mu_P}{h_P^3} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right)_P + \frac{\rho_P v_P}{h_P^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_P \right] \quad (C.20c)$$

$$S_c^u = \frac{(p_w - p_e)}{h_p^3 \Delta\psi_u} + \frac{2\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial \psi} \right)_p - \frac{2\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_p - \frac{\rho_p v_p^2}{h_p^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p \quad (C.20d)$$

C.4. Equação de Navier-Stokes na direção η

O volume de controle adotado para a integração da equação da quantidade de movimento linear na direção η , equação 4.2, é mostrado na Fig. C.3.

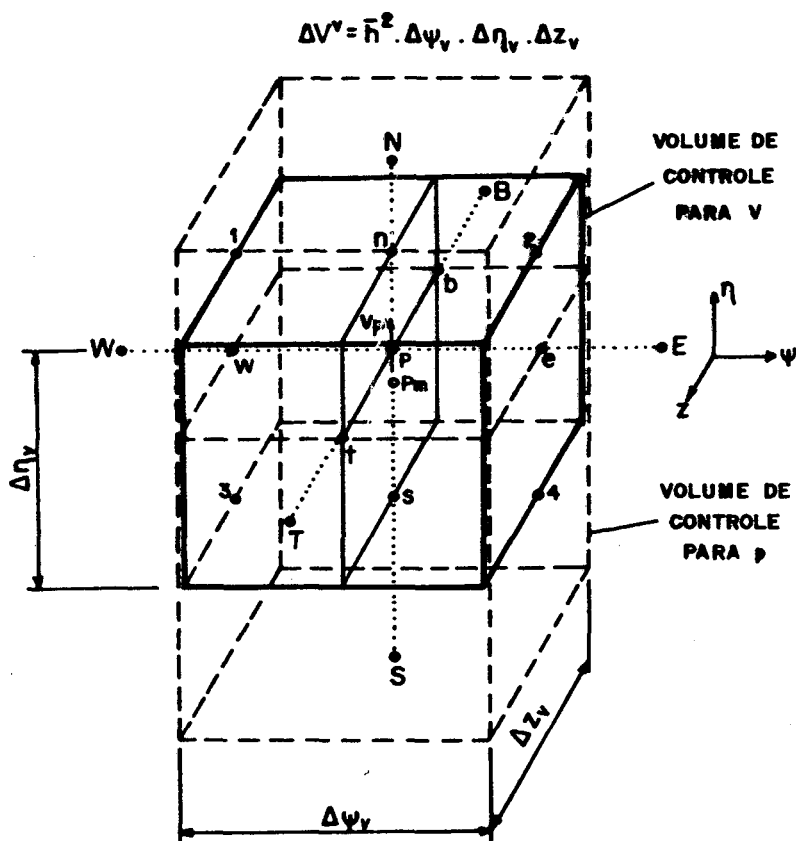


Fig. C.3 - Volume de controle para a velocidade v .

Seguindo o mesmo procedimento utilizado na dedução da equação discretizada para a velocidade u , obtém-se,

$$a_P^v = a_E^v + a_W^v + a_N^v + a_S^v + a_T^v + a_B^v + b^v \quad (C.21)$$

onde os coeficientes a_E , a_W , a_N , a_S , a_T e a_B são calculados através da equação C.16, levando em consideração, obviamente, as características do novo volume de controle. Além disso,

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B - S_P^v \Delta V^v \quad (C.22a)$$

$$b^v = S_c^v \Delta V^v \quad (C.22b)$$

$$S_c^v = \frac{(p_s - p_n)}{h_p^- \Delta \eta_v} + \frac{2\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_p - \frac{2\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_p \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)_p + \frac{\rho_p u_p^2}{h_p^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_p \quad (C.22c)$$

$$S_p^v = - \left[\frac{\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right)_p + \frac{\mu_p}{h_p^3} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2} \right)_p + \frac{\rho_p u_p}{h_p^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \psi} \right)_p \right] \quad (C.22d)$$

Os fluxos convectivos e difusivos são calculados de maneira semelhante àqueles das equações C.4 e C.17, respectivamente, levando em consideração o novo volume de controle.

O cálculo das derivadas da velocidade u é efetuado da seguinte forma,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_p = \frac{\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) - \left(\frac{u_3 + u_4}{2}\right)}{\Delta \eta_v} \quad (\text{C.23a})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_p = \frac{\left(\frac{u_2 + u_4}{2}\right) - \left(\frac{u_1 + u_3}{2}\right)}{\Delta \psi_v} \quad (\text{C.23b})$$

$$u_p = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} \quad (\text{C.24})$$

C.5. Equação de Navier-Stokes na direção z

A integração da equação de Navier-Stokes na direção z, equação 4.3, considerando o volume de controle representado na Fig. C.4, fornece a seguinte equação discretizada,

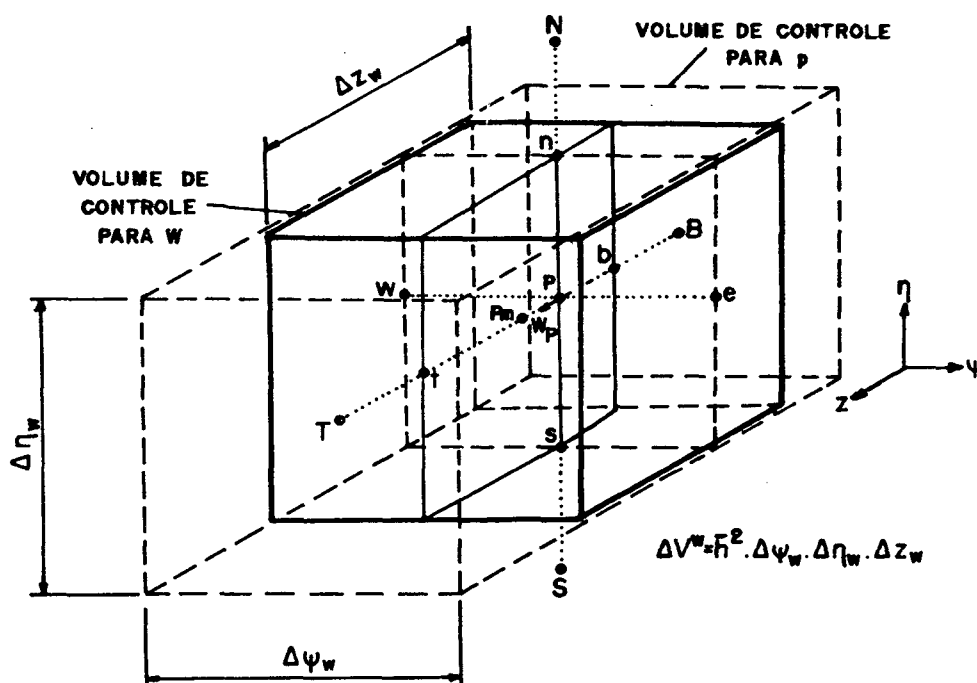


Fig. C.4 - Volume de controle para a velocidade w .

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b_e^u + \frac{(p_P - p_E) \cdot \Delta V_e^u}{h_{\psi}^- \Delta \psi_{u_e}} \quad (C.26)$$

onde a_{nb} - são os coeficientes dos pontos vizinhos;

u_{nb} - são as velocidades nos pontos vizinhos;

b_e^u - somatória dos termos fonte sem o termo de pressão,

ou,

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b_e^u + (p_P - p_E) \cdot A_e \quad (C.27)$$

onde $A_e = h_{\psi}^- \Delta \eta_{u_e} \Delta z_{u_e}$ é a área da secção transversal no ponto médio do volume de controle para u_e .

A grande vantagem de utilizar o arranjo desencontrado dos volumes de controle encontra-se na equação C.27: a diferença de pressão $(p_P - p_E)$ pode ser usada para calcular a força atuando sobre o volume de controle da velocidade u_e , ou seja, $(p_P - p_E) \cdot A_e$. Este fato introduz maior consistência física ao método.

As demais equações são dadas por,

$$a_w u_w = \sum a_{nb} u_{nb} + b_w^u + (p_W - p_P) \cdot A_w \quad (C.28a)$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b_n^v + (p_P - p_N) \cdot A_n \quad (C.28b)$$

$$a_s v_s = \sum a_{nb} v_{nb} + b_s^v + (p_S - p_P) \cdot A_s \quad (C.28c)$$

$$a_t w_t = \sum a_{nb} w_{nb} + b_t^w + (p_P - p_T) \cdot A_t \quad (C.28d)$$

$$a_b w_b = \sum a_{nb} w_{nb} + b_b^w + (p_B - p_P) \cdot A_b \quad (C.28e)$$

onde

$$A_w = h_{\psi}^{-} \Delta \eta_{uw} \Delta z_{uw} \quad (C.29a)$$

$$A_n = h_{\eta}^{-} \Delta \psi_{vn} \Delta z_{vn} \quad (C.29b)$$

$$A_s = h_{\eta}^{-} \Delta \psi_{vs} \Delta z_{vs} \quad (C.29c)$$

$$A_t = \bar{h}^{-2} \Delta \psi_{wt} \Delta \eta_{wt} \quad (C.29d)$$

$$A_b = \bar{h}^{-2} \Delta \psi_{wb} \Delta \eta_{wb} \quad (C.29e)$$

É importante notar que se o campo de pressão de um determinado escoamento é conhecido, as componentes de velocidade podem ser determinadas pela solução das equações C.27 e C.28. Além disso, essas componentes satisfazem a equação da continuidade. Contudo, na maioria das vezes, não se conhece o correto campo de pressão que, aliás, também é uma incógnita do problema.

Uma solução para este problema é estimar um campo inicial para as velocidades (para o cálculo dos coeficientes) e pressão, p^* , e calcular um campo de velocidades através das equações C.27 e C.28, resultando em,

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b_e^{u^*} + (p_P^* - p_E^*) \cdot A_e \quad (C.30a)$$

$$a_w u_w^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b_w^{u^*} + (p_W^* - p_P^*) \cdot A_w \quad (C.30b)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b_n^{v^*} + (p_P^* - p_N^*) \cdot A_n \quad (C.30c)$$

$$a_s v_s^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b_s^{v^*} + (p_S^* - p_P^*) \cdot A_s \quad (C.30d)$$

$$a_t w_t^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b_t^{w_t^*} + (p_P^* - p_T^*) \cdot A_t \quad (C.30e)$$

$$a_b w_b^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b_b^{w_b^*} + (p_B^* - p_P^*) \cdot A_b \quad (C.30f)$$

onde u^* , v^* e w^* são as velocidades determinadas pelo campo de pressão estimado, p^* . Obviamente, como este campo, geralmente, é incorreto, as velocidades assim determinadas também serão.

Portanto, é necessário determinar uma maneira de corrigir os campos assim calculados. Uma das formas é fazer,

$$p = p^* + p' \quad (C.31a)$$

$$u = u^* + u' \quad (C.31b)$$

$$v = v^* + v' \quad (C.31c)$$

$$w = w^* + w' \quad (C.31d)$$

onde p' , u' , v' e w' são correções para a pressão e componentes de velocidade, respectivamente.

Subtraindo as equações C.30 das equações C.27 e C.28, considerando os mesmos coeficientes e termos fontes para as equações correspondentes e, além disso, desprezando os termos do somatório, obtém-se,

$$u_e' = d_e (p_P' - p_E') \quad (C.32a)$$

$$u_w' = d_w (p_W' - p_P') \quad (C.32b)$$

$$v_n' = d_n (p_P' - p_N') \quad (C.32c)$$

$$v_s' = d_s (p_S' - p_P') \quad (C.32d)$$

$$w_t' = d_t (p_P' - p_T') \quad (C.32e)$$

$$w_b' = d_b (p_B' - p_P') \quad (C.32f)$$

onde

$$\begin{aligned} d_e &= A_e/a_e & (C.33a) \\ d_w &= A_w/a_w & (C.33b) \\ d_n &= A_n/a_n & (C.33c) \\ d_s &= A_s/a_s & (C.33d) \\ d_t &= A_t/a_t & (C.33e) \\ d_b &= A_b/a_b & (C.33f) \end{aligned}$$

A substituição das equações C.32 na equação da conservação da massa discretizada, equação C.3, fornece uma equação para a determinação da correção da pressão, p' ,

$$a_p p' = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_T p'_T + a_B p'_B + b p' \quad (C.34)$$

onde

$$\begin{aligned} a_E &= (\rho h)_e d_e \Delta_\eta \Delta_z & (C.35a) \\ a_W &= (\rho h)_w d_w \Delta_\eta \Delta_z & (C.35b) \\ a_N &= (\rho h)_n d_n \Delta_\psi \Delta_z & (C.35c) \\ a_S &= (\rho h)_s d_s \Delta_\psi \Delta_z & (C.35d) \\ a_T &= (\rho h^2)_t d_t \Delta_\psi \Delta_\eta & (C.35e) \\ a_B &= (\rho h^2)_b d_b \Delta_\psi \Delta_\eta & (C.35f) \\ a_p &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B & (C.35g) \\ b p' &= [(\rho h u^*)_w - (\rho h u^*)_e] \Delta_\eta \Delta_z + \\ &+ [(\rho h v^*)_s - (\rho h v^*)_n] \Delta_\psi \Delta_z + \\ &+ [(\rho h^2 w^*)_b - (\rho h^2 w^*)_t] \Delta_\psi \Delta_\eta & (C.35h) \end{aligned}$$

Com os valores de p' , determina-se um novo campo de pressões através da equação C.31a. Este campo pode ser considerado como um novo campo estimado, p^* , para ser utilizado nas equações da quantidade de movimento. A correção do campo de velocidade é efetuado pelas equações C.32. O campo daí resultante agora satisfaz a equação

la continuidade.

Este método de tratar o acoplamento entre pressão e velocidade foi desenvolvido por Patankar [02] e é denominado de SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations). Resumindo, o método consiste em:

1. Estimar um campo de pressão p^* , e um campo de velocidade u , v e w ;
2. Resolver as equações da quantidade de movimento linear, equações C.27 e C.28, obtendo um campo de velocidade u^* , v^* e w^* ;
3. Resolver a equação para p' , equação C.34;
4. Calcular $p = p^* + p'$;
5. Calcular u , v e w pelas equações C.32 (com o auxílio da equação C.31), que agora satisfazem a equação da continuidade;
6. Tratar o campo de pressão p como um novo campo p^* , retornar ao passo 2 e repetir o processo até obter uma solução convergida.

A convergência da solução pode ser acompanhada através do termo fonte $b^{p'}$ da equação para p' , equação C.34, uma vez que este é exatamente igual ao lado esquerdo da equação da continuidade com o sinal trocado, considerando o campo de velocidade estimado. Se o valor de $b^{p'}$ for zero, significa que o campo estimado (u^*, v^*, w^*) satisfaz a equação da continuidade e que nenhuma correção da pressão é necessária, ou seja, $p'=0$.

Assim, o campo de pressão determinado, ao ser substituído nas equações de Navier-Stokes, produz um campo de velocidade que satisfaz a equação da conservação da massa.

D. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS A PARTIR DAS EQUAÇÕES CORRESPONDENTES EM COORDENADAS BICILÍNDRICAS.

Este apêndice apresenta as equações do movimento em coordenadas cilíndricas obtidas a partir das mesmas equações escritas em coordenadas bicilíndricas.

Considerando a equação da quantidade de movimento linear na direção ψ , equação 4.1, tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho h u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho h v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h^2 w) \right] = & -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \\ & + \frac{\mu}{h^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \\ & + \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial \psi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{u}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2} - \frac{u}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) - \\ & - \frac{\rho}{h^2} \left(u v \frac{\partial h}{\partial \eta} - v^2 \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) \end{aligned} \quad (D.1)$$

Do apêndice B, sabe-se que,

$$h = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \psi} \quad (D.2)$$

e

$$r = a / \sinh \eta \quad (D.3)$$

Nota-se que se $a \rightarrow \infty$, $\eta = \operatorname{arcsinh}(a/r)$ torna-se suficientemente grande para que $\cosh \eta \approx \sinh \eta$. Desta forma, a equação

D.2 transforma-se em,

$$h = a/\cosh\eta = a/\sinh\eta = r \quad (D.4)$$

pois, $\cos\psi \ll \cosh\eta$.

Assim, a equação D.1 pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial\psi} (\rho r u u) - r \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r^2 w u) \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial\psi} + \\ &+ \frac{\mu}{r^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \\ &+ \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial\eta} \frac{\partial v}{\partial\psi} - \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial\psi} \frac{\partial v}{\partial\eta} - \frac{u}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial\psi^2} - \frac{u}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial\eta^2} \right) - \\ &- \frac{\rho}{2} \left(u v \frac{\partial r}{\partial\eta} - v \frac{\partial r}{\partial\psi} \right) \end{aligned} \quad (D.5)$$

Sabendo que r é função apenas de η , pode-se escrever, para uma variável genérica ϕ ,

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial\eta} \quad (D.6)$$

Além disso, derivando a equação D.3 em relação a η , obtém-se,

$$\frac{dr}{d\eta} = -r \quad (D.7)$$

e

$$\frac{d^2 r}{d\eta^2} = r \quad (D.8)$$

Então, a equação D.5 transforma-se em,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho u u) - \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r w u) \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \\ &+ \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \\ &+ \frac{\rho u v}{r} - \frac{\mu u}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (D.9)$$

que é exatamente a equação da quantidade de movimento na direção θ , em coordenadas cilíndricas, desde que se note que $\psi \equiv \theta$ e que a velocidade v no sistema cilíndrico possui o sinal invertido com relação à componente v no sistema bicilíndrico.

Da mesma forma, pode-se obter as equações do movimento nas direções r e z e, também, a equação da continuidade. A equação de Navier-Stokes na direção r é dada por,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v v) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho r w v) \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \frac{\mu}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - r \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \\ &+ \frac{\rho u^2}{r} + \frac{\mu v}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (D.10)$$

e na direção z por,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho u w) - \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r w w) \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (D.11)$$

A equação da conservação da massa transforma-se em,

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho u) - \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r w) \right] = 0 \quad (D.12)$$

Assim, quando as equações anteriores, em coordenadas bicilíndricas, são resolvidas para excentricidades próximas de zero, caso em que $a \rightarrow \infty$, na verdade são as equações em coordenadas cilíndricas que estão sendo resolvidas.